On the homotopy type of the spaces of Morse functions on surfaces

E. A. Kudryavtseva

Let M be a smooth closed orientable surface. Let F be the space of Morse functions on M having fixed number of critical points of each index, moreover at least $\chi(M)+1$ critical points are labeled by different labels (enumerated). A notion of a skew cylindric-polyhedral complex, which generalizes the notion of a polyhedral complex, is introduced. The skew cylindric-polyhedral complex $\widetilde{\mathbb{K}}$ (the "complex of framed Morse functions"), associated with the space F, is defined. In the case when $M=S^2$, the polyhedron $\widetilde{\mathbb{K}}$ is finite; its Euler characteristic $\chi(\widetilde{\mathbb{K}})$ is evaluated and the Morse inequalities for its Betti numbers $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}})$ are obtained. A relation between the homotopy types of the polyhedron $\widetilde{\mathbb{K}}$ and the space F of Morse functions, endowed with the C^∞-topology, is indicated.

Key words: Morse functions, complex of framed Morse functions, polyhedral complex, C^∞-topology, universal moduli space.

MSC-class: 58E05, 57M50, 58K65, 46M18

УДК 515.164.174+515.164.22+515.122.55

О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях

Е. А. Кудрявцева

Аннотация

Пусть M — гладкая замкнутая ориентируемая поверхность. Пусть F – пространство функций Морса на M с фиксированным количеством критических точек каждого индекса, причем не менее чем $\chi(M)+1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы). Введено понятие косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, обобщающее понятие полиэдрального комплекса. Определен косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ ("комплекс оснащенных функций Морса"), ассоциированный с пространством F. В случае $M=S^2$ полиэдр $\widetilde{\mathbb{K}}$ конечен; вычислена его эйлерова характеристика $\chi(\widetilde{\mathbb{K}})$ и получены неравенства Морса для его чисел Бетти $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}})$. Указана связь гомотопических типов полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ и пространства F функций Морса, снабженного C^∞-топологией.

Библиография: 41 название.

Ключевые слова: функции Морса, комплекс оснащенных функций Морса, полиэдральный комплекс, C^∞-топология, универсальное пространство модулей.

1 Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1].

Задача изучения гладких функций с "умеренными" особенностями на гладком многообразии M является классической. Изучение топологии пространства таких функций как правило состоит из двух частей:

[0]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10–01–00748-a), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1.3704), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант № 14.740.11.0794).

1) сведение к комбинаторной задаче, т.е. построение комбинаторного объекта (например, конечномерного полиэдра), гомотопически эквивалентного изучаемому пространству функций;

2) решение полученной комбинаторной задачи (изучение топологии построенного полиэдра).

Одним из таких подходов является (параметрический) h-принцип М. Громова [2], изучаемый, например, в работах [3], [4], [5, теорема 2.3], [6, 7] (см. также [1]). Невыполнение 1-параметрического h-принципа для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности большей 5 показано в работах [7, 6] (см. также [1, §1]).

Рассмотрим задачу о вычислении гомотопического типа пространства $F(M)$ функций Морса на компактном гладком многообразии M, например, на гладкой поверхности. Для пространства $F(S^1)$ функций Морса на окружности $M = S^1$ имеется следующий метод решения. Сопоставим каждой функции Морса $f \in F_r(S^1)$, имеющей ровно $2r$ критических точек, множество ее критических точек локальных минимумов (т.е. некоторую r-точечную конфигурацию на поверхности M). Нетрудно доказывается, что построенное отображение $F_r(S^1) \to Q_r(S^1)$ сюръективно и является гомотопической эквивалентностью. Тем самым, описанный метод сводит задачу к изучению топологии конфигурационного пространства $Q_r(S^1)$, т.е. пространства r-точечных конфигураций на S^1. Гомотопический тип последнего пространства легко находится и равен S^1.

В настоящей работе изучается топология пространства $F = F(M)$ функций Морса на компактной двумерной поверхности M. Предлагаемый нами метод аналогичен "методу конфигурационных пространств", описанному выше. А именно, в настоящей работе описывается построение комбинаторного объекта – комплекса $\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}(M)$ оснащенных функций Морса (определение 4.1 и теорема 4.2), аналогичного комплексу функций Морса $\widetilde{K} = \widetilde{K}(M)$ из работы [8]. Комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ является конечномерным косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (см. определение 2.4), т.е. допускает разбиение на "косые цилиндрические ручки" (см. определение 2.3), аналогичные круглым ручкам, и приклеенные друг к другу "регулярным" образом. При этом ручки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности функций Морса из $F^1 \subset F$ (см. определения 1.1(B), 1.3), а подошва ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ функции f, содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$, отвечающих классам изотопности функций, полученных малыми возмущениями функции f. Важным свойством комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ является то, что в большинстве случаев (см. (2.2)) пространство F функций Морса на компактной поверхности M гомотопически эквивалентно полиэдру $R \times \widetilde{\mathbb{K}}$:

$$F \sim R \times \widetilde{\mathbb{K}}, \tag{1.1}$$

где $R = R(M)$ – одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, S^1, $S^1 \times S^1$ и точка (см. (2.1)), а $\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}(M)$ – "комплекс оснащенных функций Морса", построенный в настоящей работе (см. замечание 2.7). Тем самым, изучение топологии пространства F функций Морса сводится к комбинаторной задаче — изучению топологии полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$.

В некоторых случаях гомологии полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ могут быть изучены методами теории Морса, ввиду естественного разложения полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ на косые цилиндрические ручки. В качестве иллюстрации мы получаем обобщенные неравенства Морса для чисел Бетти пространства $\widetilde{\mathbb{K}}$ и находим его эйлерову характеристику в случае, когда $M = S^2$ и у каждой функции $f \in F$ не менее трех критических точек помечены разными метками, т.е. занумерованы (следствие 2.8).

Наши комплексы $\widetilde{K}$ и $\widetilde{\mathbb{K}}$ функций Морса и оснащенных функций Морса аналогичны известным (абстрактным симплициальным флаговым) комплексам, рассматриваемым при изучении группы классов отображений поверхности M (см. [9], [10, 11, 12], [13], [14]), кубическим комплексам [15], и обобщают граф разрезов (см. [16]). В случае $M = S^1$ аналогичный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ состоит из одной точки и $R = S^1$.

Связные компоненты пространств функций Морса на поверхности изучались С.В. Матвеевым [16], Х. Цишангом, В.В. Шарко [17], Е.А. Кудрявцевой [16], С.И. Максименко [18], а также Ю.М. Бурманом [19, 20] (для пространств гладких функций без критических точек на открытых поверхностях) и

Е.А. Кудрявцевой [8] (для пространств функций Морса с фиксированным множеством критических точек). Комбинаторные и топологические свойства пространств функций Морса на поверхностях изучались в работах [21], [22]. В работах [23], [24], [25, 26], [27], [28] и [29] функции Морса изучались в связи с задачей классификации (лиувиллевой, орбитальной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Группы гомологий и гомотопий пространств функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на окружности изучался В.И. Арнольдом [30].

Перейдем к точным формулировкам.

Определение 1.1. Пусть M — гладкая (т.е. класса C^∞) компактная связная поверхность, край которой пуст или не пуст, $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$, где $\partial^+ M$ — объединение некоторых граничных окружностей M.

(A) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M. Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все ее критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\operatorname{int} M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M, что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем $\inf(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^- M$, и $\sup(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^+ M$.

(B) Функцию f на M назовем *функцией Морса на* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, если $f \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и все ее критические точки невырождены (т.е. квадратичная форма в $T_x M$, заданная матрицей вторых частных производных f в критической точке x, невырождена). Пусть

$$F := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса f на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно $p + q + r$ критических точек, из которых p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ — число граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства Морса:

$$\chi(M) = p - q + r, \quad p + d^+ > 0, \quad r + d^- > 0, \tag{1.2}$$

так как в противном случае $F = \varnothing$. Пространство F мы наделим C^∞-топологией, см. [1, §4(a)], и назовем его *пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Обозначим через $F^1 \subset F$ подпространство в F, состоящее из таких функций Морса $f \in F$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

(C) Обозначим через F^{num} (соотв. $F^{1,\mathrm{num}}$) пространство, полученное из пространства F (соотв. F^1) введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых *отмеченными* критическими точками) функций Морса $f \in F$ (соответственно $f \in F^1$). Наделим его C^∞-топологией как в [1, §4(a)]. Если количество отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек равно $\widehat{p}, \widehat{r}, \widehat{q}$ соответственно (где $0 \leq \widehat{p} \leq p$, $0 \leq \widehat{q} \leq q$, $0 \leq \widehat{r} \leq r$), то имеем $C_p^{\widehat{p}} C_q^{\widehat{q}} C_r^{\widehat{r}} \widehat{p}! \widehat{q}! \widehat{r}!$-листные накрытия $F^{\mathrm{num}} \to F$ и $F^{1,\mathrm{num}} \to F^1$.

Обозначение 1.2. Пусть $\mathscr{D}^\pm = \mathrm{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ — группа всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M, переводящих каждое множество $\partial^+ M, \partial^- M$ в себя. Пространство $\mathscr{D}^\pm$ наделим C^∞-топологией, см. [1, §4(б)]. Пусть $\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{D}^\pm$ — подгруппа, состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathscr{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M.

Определение 1.3. (A) Две функции Морса $f, g \in F$ назовем *эквивалентными*, если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathscr{D}^\pm$ и $h_2 \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ (и h_1 сохраняет нумерацию критических точек, если $f, g \in F^{\mathrm{num}}$), и обозначаем $f \sim g$. Класс эквивалентности функции f обозначим через $[f]$.

(Б) Две функции Морса f и g назовем *изотопными*, если они эквивалентны и $h_1 \in \mathscr{D}^0$ (т.е. h_1 изотопен тождественному), и обозначаем $f \sim_{\rm isot} g$. Множество всех функций из F^1, изотопных функции f, обозначим через $[f]_{\rm isot}$.

Классификация функций Морса из F с точностью до *эквивалентности* легко получается из классификации функций Морса с точностью до *послойной эквивалентности* (см. [26, гл. 2, теоремы 4 и 8]). Автором доказаны критерии (послойной) эквивалентности (соотв. изотопности) пары “возмущенных” функций Морса $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, полученных малыми возмущениями из пары (послойно) эквивалентных (соотв. изотопных) функций Морса $f, g \in F$ (см. §3, шаг 3, или [27, утверждение 1.1 и §3]), и доказана классификация функций Морса с точностью до *изотопности* (см. [31, лемма 1 и теорема 2]).

В работе [1] введено понятие *оснащенных* функций Морса на компактной поверхности M и доказана гомотопическая эквивалентность пространства F функций Морса и пространства $\mathbb{F}$ оснащенных функций Морса на M. Также доказан аналог последнего утверждения для ограничений указанных гомотопических эквивалентностей на классы изотопности $[f]_{\rm isot}$ ([1, теорема 2.5]). Последнее дает положительный ответ на вопрос, поставленный В.И. Арнольдом.

Статья имеет следующую структуру. В §2 определяется более общее пространство функций Морса, вводится понятие косого цилиндрически-полиэдрального комплекса и формулируются основные результаты настоящей работы (теорема 2.6 и следствие 2.8). В §3 описывается построение стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\rm isot}$ функции Морса $f \in F^1$, и изучены отображения инцидентности между парами ручек, отвечающими парам примыкающих друг к другу классов изотопности $[f]_{\rm isot} \prec [g]_{\rm isot}$ функций (определение 2.4(D), леммы 3.1–3.5). В §4 описывается построение комбинаторного объекта – комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса (и содержащего его многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$) и доказывается, что он является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (теоремы 4.2, 4.3).

Автор приносит благодарность В.И. Арнольду, С.А. Мелихову, А.А. Ошемкову, Д.А. Пермякову, А.Т. Фоменко и Х. Цишангу за внимание к работе и полезные обсуждения.

2 Точные формулировки основных результатов

Следующее пространство обобщает пространства $F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, $F^{\rm num}$ и состоит из функций Морса, у которых некоторые из отмеченных критических точек закреплены.

Определение 2.1. (А) Пусть $0 \le p^* \le \widehat{p}$, $0 \le q^* \le \widehat{q}$, $0 \le r^* \le \widehat{r}$ (см. определение 1.1(C)). Обозначим

$$(p', p''; q', q''; r', r'') := (\widehat{p} - p^*, p - \widehat{p}; \widehat{q} - q^*, q - \widehat{q}; \widehat{r} - r^*, r - \widehat{r}).$$

Для каждой функции $f \in F^{\rm num}$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,0}$, $\mathcal{C}_{f,1}$, $\mathcal{C}_{f,2}$ множества ее критических точек локальных минимумов, седловых критических точек и точек локальных максимумов соответственно, и через $\widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$, множества отмеченных критических точек. В каждом из множеств отмеченных (а потому занумерованных) критических точек рассмотрим подмножество, обозначаемое через $\mathcal{C}^*_{f,0}, \mathcal{C}^*_{f,1}, \mathcal{C}^*_{f,2}$ и состоящее из первых p^*, q^*, r^* точек соответственно. Фиксируем “базисную” функцию $f_* \in F^{\rm num}$. Пусть

$$F := F_{p^*,p',p'';q^*,q',q'';r^*,r',r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса $f \in F^{\rm num}$ на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 1.1(B)), таких что $\mathcal{C}^*_{f,\lambda} = \mathcal{C}^*_{f_*,\lambda}$ для любого $\lambda = 0, 1, 2$. Пространство F мы наделим C^∞-топологией, см. [1, §4], и назовем его *обобщенным пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Определим подпространство $F^1 \subset F$ аналогично определению 1.1(B).

Пространства F, F^{num} из определения 1.1 имеют вид

$$F = F_{0,0,p;0,0,q;0,0,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad F^{\mathrm{num}} = F_{0,\widehat{p},p'';0,\widehat{q},q'';0,\widehat{r},r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

соответственно. Из теоремы С.В. Матвеева (см. [16]) и ее обобщения в [16] для пространства F^{num} получаем следующее ее обобщение: любое обобщенное пространство $F = F_{p^*,p',p'';0,\widehat{q},q'';r^*,r',r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса без закрепленных седловых точек (т.е. при $q^* = 0$) линейно связно.

Всюду в статье мы предполагаем, что поверхность M ориентирована. Случай неориентируемой поверхности M рассматривается как в [1, замечание 2.7].

Следующие группы диффеоморфизмов обобщают группы $\mathscr{D}^\pm$ и $\mathscr{D}^0$, см. обозначение 1.2 выше. Мы их вводим для изучения обобщенного пространства F функций Морса (и по-прежнему обозначаем их через $\mathscr{D}^\pm$ и $\mathscr{D}^0$).

Обозначение 2.2. (A) Множества $\mathcal{C}^*_{f,0}, \mathcal{C}^*_{f,1}, \mathcal{C}^*_{f,2}$ фиксированных критических точек совпадают для разных функций $f \in F$, будем их обозначать через $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ соответственно, положим $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Обозначим через $\mathscr{D}^\pm = \mathrm{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ группу всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M, переводящих каждое множество $\partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_\lambda$ в себя, $0 \le \lambda \le 2$. Пространство $\mathscr{D}^\pm$ тоже наделим C^∞-топологией, см. [1, §4(б)]. Если M ориентируема, обозначим через $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}^\pm$ подгруппу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов (с индуцированной топологией). Пусть $\mathscr{D}^0 = \mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}) \subset \mathscr{D}^\pm$ — подгруппа (с индуцированной топологией), состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathscr{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C})$.

(B) Обозначим через $\bar{M}$ замкнутую поверхность, полученную из поверхности M стягиванием в точку каждой граничной окружности. Обозначим через $\mathcal{T} \subset \mathscr{D}$ группу (называемую *группой Торелли*), состоящую из всех диффеоморфизмов $h \in \mathscr{D}$, переводящих в себя каждую компоненту края M, и таких что индуцированный гомеоморфизм $\bar{h}\colon \bar{M} \to \bar{M}$ индуцирует тождественный автоморфизм группы гомологий $H_1(\bar{M})$. Имеем $\mathscr{D}^0 \subset \mathcal{T}$.

Из результатов [32, 33] К.Дж. Эрля и Дж. Иллса (мл.) следует, что имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathscr{D}^0 \sim R_{\mathscr{D}^0}, \tag{2.1}$$

где $R_{\mathscr{D}^0}$ — одно из четырех многообразий, определяемое парой $(M, |\mathcal{C}|)$, а именно: $SO(3) = \mathbb{R}P^3$ (при $M = S^2, \mathcal{C} = \varnothing$), $SO(2) = S^1$ (при $0 \le \chi(M) - |\mathcal{C}| \le 1$ и $d^+ + d^- + |\mathcal{C}| > 0$), $T^2 = S^1 \times S^1$ (при $M = T^2$, $\mathcal{C} = \varnothing$) и точка (при $\chi(M) < |\mathcal{C}|$) (см., например, [34, 32]). В частности, группа $\mathscr{D}^0$ линейно связна.

2.1 Косые цилиндрически-полиэдральные комплексы

Всюду в статье многогранники выпуклы и имеют размерность $\le 2q$, а евклидовы многогранники $\le q-1$. Под *выпуклым многогранником* (соответственно *евклидовым выпуклым многогранником*) понимаем выпуклую оболочку конечного подмножества векторного пространства $\mathbb{R}^{2q}$ (соответственно евклидова пространства $\mathbb{E}^{q-1}$), а под *изоморфизмом* многогранников — биекцию между многогранниками, продолжающуюся до аффинного изоморфизма (соответственно изометрии) объемлющих пространств.

Утолщенный цилиндр — это главное расслоение над выпуклым многогранником со слоем стандартный цилиндр $\mathbb{R}^c \times (S^1)^d$ (где прямые сомножители S^1 в разложении цилиндра не упорядочены), а *стандартная цилиндрическая ручка* — это прямое произведение евклидова выпуклого многогранника и утолщенного цилиндра. Уточним и обобщим эти понятия.

Определение 2.3 (стандартная косая цилиндрическая ручка)**.** (A) *Утолщенным цилиндром* назовем прямое произведение $\mathbb{S} := (\mathbb{R}^c \times (S^1)^d) \times P$, где P — выпуклый многогранник, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Гомеоморфизм $h : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами назовем *допустимым*,

если $c_1 = c_2 =: c$, $d_1 = d_2 =: d$, существуют биекции $\pi \in \Sigma_c$ и $\rho \in \Sigma_d$, изоморфизм многогранников $a\colon P_1 \to P_2$ и непрерывное отображение $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c+d})\colon P_1 \to \mathbb{R}^c \times (S^1)^d$, такие что для любого $(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) \in \mathbb{S}_1$ выполнено

$$h(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(c)}, \varphi_{\rho(1)}, \dots, \varphi_{\rho(d)}, 0) \\ +(\delta_1(u), \dots, \delta_{c+d}(u), a(u)).$$

Автоморфизм $b\colon D \to D$ евклидова многогранника (т.е. изоморфизм на себя) назовем *допустимым*, если он тривиален или не имеет неподвижных вершин, а для любой грани $\tau \subset \partial D$ выполнено либо $b(\tau) = \tau$, либо $\tau \cap b(\tau) = \varnothing$.

(B) *Стандартной цилиндрической ручкой* назовем прямое произведение $D \times \mathbb{S}$ евклидова выпуклого многогранника D и утолщенного цилиндра $\mathbb{S}$ (см. (A)). Гомеоморфизм $D_1 \times \mathbb{S}_1 \to D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он является прямым произведением изоморфизма $b\colon D_1 \to D_2$ евклидовых многогранников и допустимого гомеоморфизма $\mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров (см. (A)).

Автоморфизм $D \times \mathbb{S} \to D \times \mathbb{S}$ стандартной цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если либо он совпадает с тождественным, либо хотя бы один из соответствующих автоморфизмов многогранников $b\colon D \to D$, $a\colon P \to P$ и перестановок $\pi \in \Sigma_c$ и $\rho \in \Sigma_d$ нетривиален, причем автоморфизм $b\colon D \to D$ допустим (см. (A)) и выполнены следующие (необязательные в общем случае, но выполненные для комплексов оснащенных функций Морса в случае (2.2)) дополнительные условия: перестановка $\pi \in \Sigma_c$ всегда тривиальна, в случае тривиальности автоморфизма $a\colon P \to P$ автоморфизм $b\colon D \to D$ тривиален, а в случае тривиальности b перестановка $\rho \in \Sigma_d$ и автоморфизм $a^2\colon P \to P$ тривиальны.

(C) *Стандартной косой цилиндрической ручкой* назовем пространство орбит $\mathbb{D}^{\rm st} := (D \times \mathbb{S})/\Gamma$ свободного действия (автоматически конечной) группы Γ на стандартной цилиндрической ручке $D \times \mathbb{S}$ допустимыми автоморфизмами (см. (B)). Размерность k многогранника $D = D^k$ назовем *индексом* ручки $\mathbb{D} = \mathbb{D}^{\rm st}$, подмножество $\partial\mathbb{D} := ((\partial D) \times \mathbb{S})/\Gamma \subset \mathbb{D}$ назовем ее *подошвой*, а дополнение $\mathring{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}$ — *открытой стандартной (косой) цилиндрической ручкой*, отвечающей ручке $\mathbb{D}$. Для любой грани $D' \subset \partial D$ образ подмножества $D' \times \mathbb{S} \subset D \times \mathbb{S}$ при проекции $D \times \mathbb{S} \to \mathbb{D}^{\rm st}$ назовем *(косой) гранью* стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}^{\rm st}$. (Косая грань всегда является стандартной косой цилиндрической ручкой ввиду допустимости автоморфизма $b\colon D \to D$ из (B), см. (A).) Гомеоморфизм $\mathbb{D}_1^{\rm st} \to \mathbb{D}_2^{\rm st}$ между стандартными косыми цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он поднимается до изоморфизма $D_1 \times \mathbb{S}_1 \to D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек. Автоморфизм $\mathbb{D}^{\rm st} \to \mathbb{D}^{\rm st}$ стандартной косой цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если он поднимается до допустимого автоморфизма $D \times \mathbb{S} \to D \times \mathbb{S}$ соответствующей стандартной цилиндрической ручки (см. (B)).

(D) Погружение $i : \mathbb{S}_1 \looparrowright \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами $\mathbb{S}_j = (\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}) \times P_j$, $j = 1, 2$ (см. (A)), назовем *допустимым*, если существуют отображения $\pi\colon \{1, \dots, c_2{+}d_2\} \to \{0, 1, \dots, c_1{+}d_1\}$ и $\eta\colon \{1, \dots, c_1{+}d_1\} \to \{1, -1\}$, такие что $\{1, \dots, c_1\} \subset \pi(\{1, \dots, c_2\}) \subset \{0, 1, \dots, c_1\}$, $\pi|_{\{1,\dots,c_2\} \cap \pi^{-1}\{1,\dots,c_1\}}$ инъективно, $\{c_1 + 1, \dots, c_1 + d_1\} \subset \pi(\{c_2 + 1, \dots, c_2 + d_2\})$, $\eta(\{1, \dots, c_1\}) = 1$, а также существуют отображение $a\colon P_1 \to P_2$, продолжающееся до аффинного, и непрерывное отображение $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c_2+d_2})\colon P_1 \to \mathbb{R}^{c_2} \times (S^1)^{d_2}$, такие что

$$i(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) = (\eta(\pi(1))\, x_{\pi(1)}, \dots, \eta(\pi(c_2 + d_2))\, x_{\pi(c_2+d_2)}, 0) \\ +(\delta_1(u), \dots, \delta_{c_2+d_2}(u), a(u))$$

для любого $(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) \in \mathbb{S}_1$, где последние d_j координат любой точки из $\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}$ рассматриваются по модулю 1 при $j = 1, 2$, $x_0 := 0$, $\eta(0) := 1$. Погружение $D_1 \times \mathbb{S}_1 \looparrowright D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками (см. (B)) назовем *допустимым*, если оно является прямым произведением изоморфизма $D_1 \to D_2$ евклидовых многогранников и допустимого погружения

$\mathbb{S}_1 \looparrowright \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров. Вложение $\mathbb{D}_1^{\mathrm{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_2^{\mathrm{st}}$ между стандартными *косыми* цилиндрически-ми ручками (см. (C)) назовем *мономорфизмом*, если оно поднимается до допустимого погружения $D_1 \times \mathbb{S}_1 \looparrowright D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек.

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 2.4 (косой цилиндрически-полиэдральный комплекс)**.** (A) Будем говорить, что на подмножестве $\mathbb{D} \subset X$ задана *структура (косой) цилиндрической ручки*, и называть это подмножество *(косой) цилиндрической ручкой*, если $\mathbb{D}$ замкнуто в X, и фиксированы стандартная (косая) цилиндрическая ручка $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}$ с точностью до изоморфизма, и гомеоморфизм $\varphi_{\mathbb{D}}\colon \mathbb{D}^{\mathrm{st}} \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}$ (называемый *характеристическим отображением* (косой) ручки $\mathbb{D}$) с точностью до допустимых автоморфизмов стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}$. Подмножество $\partial\mathbb{D} := \varphi_{\mathbb{D}}(\partial\mathbb{D}^{\mathrm{st}})$ назовем *подошвой* (косой) ручки $\mathbb{D}$. Вложение $i\colon \mathbb{D}_1 \hookrightarrow \mathbb{D}_2$ между (косыми) цилиндрическими ручками назовем *мономорфизмом*, если вложение $\varphi_{\mathbb{D}_2}^{-1} \circ i \circ \varphi_{\mathbb{D}_1}$ соответствующих стандартных (косых) ручек является мономорфизмом.

(B) Пространство X назовем *(косым) цилиндрически-полиэдральным комплексом*, если фиксировано разбиение $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{\mathbb{D}}_i$, где $n \le \infty$, на попарно непересекающиеся подмножества $\mathring{\mathbb{D}}_i$, называемые *открытыми (косыми) цилиндрическими ручками* разбиения, и для каждой открытой ручки $\mathring{\mathbb{D}}_i$ фиксирована структура (косой) цилиндрической ручки на ее замыкании $\mathbb{D}_i := \overline{\mathring{\mathbb{D}}_i}$, называемом *(косой) цилиндрической ручкой* разбиения, такая что $\mathring{\mathbb{D}}_i = \mathbb{D}_i \setminus \partial\mathbb{D}_i$, причем выполнены следующие условия:

- (c) для любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ ограничение характеристического отображения $\varphi_{\mathbb{D}_i}\colon \mathbb{D}_i^{\mathrm{st}} \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}_i$ на произвольную (косую) грань $(\mathbb{D}_i^{\mathrm{st}})' \subset \partial\mathbb{D}_i^{\mathrm{st}}$ соответствующей стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}_i^{\mathrm{st}}$ является мономорфизмом $(\mathbb{D}_i^{\mathrm{st}})' \hookrightarrow \mathbb{D}_j$ в некоторую (косую) ручку $\mathbb{D}_j$ (см. (A) и определение 2.3(C,D)), откуда подошва $\partial\mathbb{D}_i$ любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ индекса k содержится в объединении конечного числа (косых) ручек индекса $k-1$;
- (w) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ замкнуто пересечение $Y \cap \mathbb{D}_i$.

Максимальный индекс (косых) цилиндрических ручек (косого) цилиндрическиполиэдрального комплекса назовем *рангом* этого комплекса.

(C) Если для каждой (косой) цилиндрической ручки $\mathbb{D}_i \subset X$ выполнено $c = d = \dim P = 0$, получаем определение *строго полиэдрального комплекса* (см. [8]). Определение *полиэдрального комплекса* имеется, например, в [35].

(D) Пусть $\sigma, \tau \subset X$ – два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает к* τ и писать $\tau \prec \sigma$ (и $\bar\tau \prec \bar\sigma$), если $\tau \subset \partial\sigma := \bar\sigma \setminus \sigma$. Пишем $\tau \preceq \sigma$, если $\tau \prec \sigma$ или $\tau = \sigma$.

Обозначение 2.5. Для любой функции Морса $f \in F$ рассмотрим граф G_f в поверхности $\operatorname{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}(f(\mathcal{C}_{f,1}))$ выкидыванием всех компонент связности, не содержащих седловых критических точек (см. определение 2.1). Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит в графе $2q$ ребер. Если поверхность M ориентирована, то на ребрах графа G_f имеется естественная ориентация, такая, что в любой (внутренней) точке ребра репер, составленный из положительно ориентированного касательного вектора к ребру и вектора $\operatorname{grad} f$ (по отношению к какой-нибудь фиксированной римановой метрике), задает положительную ориентацию поверхности. Аналогично вводится ориентация на любой связной компоненте линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f, не содержащей критическую точку, $a \in \mathbb{R}$.

Сформулируем основной результат данной работы, описывающий комбинаторный объект – комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, ассоциированный с пространством F.

Теорема 2.6. *Пусть M — связная компактная ориентируемая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства $F = F_{p^*,p',p'';q^*,q',q'';r^*,r',r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $F^1 \subset F$ функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть отмеченные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными* (см. определение 2.1). *Предположим, что*

$$\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M) \tag{2.2}$$

(т.е. количество отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$). Тогда:

(A) *Имеется косой цилиндрически-полиэдральный комплекс*

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p^*+d^-,p',p'';q^*,q',q'';r^*+d^+,r',r''}$$

(называемый комплексом оснащенных функций Морса*) ранга $q-1$ и размерности $\dim \widetilde{\mathbb{K}} = 3q-2$ при $q \geq 2$ и $\dim \widetilde{\mathbb{K}} = 0$ при $q \leq 1$, косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ функций Морса $f \in F^1$. Индекс ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$, равен $q - s(f)$, где $s(f)$ — количество седловых критических значений функции f. Подошва $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$, таких что $[f]_{\mathrm{isot}} \prec [g]_{\mathrm{isot}}$.*

(B) *Дискретная группа $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ действует на $\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве $F^1/\sim_{\mathrm{isot}}$ классов изотопности функций. В частности, для любого класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ все ручки $\mathbb{D}_{[fh]_{\mathrm{isot}}}$, $h \in \mathscr{D}$, изоморфны одной и той же стандартной косой цилиндрической ручке $(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]})/\Gamma_{[f]}$, см. определение* 2.3(B)*. Имеется $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$-эквивариантный гомеоморфизм полиэдра $\widetilde{\mathbb{K}}$ на $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$-инвариантное подмножество некоторого гладкого $3q$-мерного многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ с плоской аффинной связностью, на котором группа $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ действует диффеоморфизмами, сохраняющими связность.*

(C) *Для каждой ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \approx (D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]})/\Gamma_{[f]} \approx (D_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}) \times P_{[f]})/\Gamma_{[f]} \sim (S^1)^d/\Gamma_{[f]}$ размерность $d = d([f])$ тора $(S^1)^d$ обладает свойствами* (3.25)*, $c + d = n([f])$* (см. (3.14)) *и $d \leq \min\{p' + p'' + r' + r'', t-1\}$, где $t = t([f]) \leq q$ — количество связных компонент графа G_f* (см. обозначение 2.5)*. Если число фиксированных критических точек $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то $d = t - 1$, а при дополнительном условии $t = q$ выполнено $d = p' + p'' + r' + r''$.*

Замечание 2.7. Согласно [1], пространства $F^1, \mathbb{F}^1$ суть сильные деформационные ретракты пространств $F, \mathbb{F}$ соответственно, а забывающие отображения $\mathbb{F} \to F$, $\mathbb{F}^1 \to F^1$ суть гомотопические эквивалентности, где $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ – пространства оснащенных функций Морса. Можно показать, что многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ из теоремы 2.6(B) в действительности гомеоморфно $\mathbb{F}^1/\mathscr{D}^0$ (т.е. является универсальным пространством модулей оснащенных функций Морса), причем действие группы $\mathscr{D}^0$ на $\mathbb{F}^1$ свободно, проекция $\mathbb{F}^1 \to \mathbb{F}^1/\mathscr{D}^0$ является тривиальным расслоением со слоем $\mathscr{D}^0$, а $\widetilde{\mathbb{K}}$ есть сильный деформационный ретракт $\widetilde{\mathcal{M}}$. Отсюда и из (2.1) следует требуемая гомотопическая эквивалентность (1.1). Можно также показать, что ограничения указанных гомотопических эквивалентностей на любой класс $[f]_{\mathrm{isot}}$ изотопности функций из F^1 или на любую косую ручку комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Пусть $\Bbbk$ – поле (например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$). Для топологического пространства X рассмотрим числа Бетти $\beta_j(X) := \dim_{\Bbbk} H_j(X; \Bbbk)$ и полином Пуанкаре $P(X,t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \beta_j(X)$. Следующее утверждение выводится из теоремы 2.6 стандартными методами теории Морса (см., например, [36, §45]).

Следствие 2.8. (A) *Если количество $\widehat{p}+\widehat{q}+\widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$, то $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}}) = 0$ при любом $j \geq 3q-2$.*

(B) *Пусть* $\bar{M} = S^2$ (см. обозначение 2.2), $p^* + q^* + r^* \le \chi(M) + 1 \le \widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$. *Тогда* $\mathscr{D} = \mathscr{D}^0$, *комплекс* $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ *является конечным, связным и компактным косым торически-полиэдральным комплексом ранга* $q-1$ *и размерности* $3q-2$ *или* 0 *(при* $q \ge 2$ *и* $q \le 1$ *соответственно); числа Бетти* $\beta_j = \beta_j(\mathbb{K})$ *комплекса* $\mathbb{K}$ *удовлетворяют неравенствам Морса-Смейла:*

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \ldots \le q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \ldots, \qquad j \ge 0,$$

где $Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j := \sum_{[f]\in F^1/\sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}, t)$. *В частности, справедливы неравенства Морса:*

$$\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} \left|\left\{[f] \in F^1/\sim \mid \ s(f) = 1\right\}\right|, \qquad \beta_j \le q_j, \quad j \ge 0.$$

Замечание 2.9. Всюду в формулировках утверждений настоящей статьи рассматриваются произвольные обобщенные пространства функций Морса $F = F_{p^*,p',p'';q^*,q',q'';r^*,r',r''}(M, \partial^+M, \partial^-M)$ и F^1, состоящие из функций Морса, у которых могут быть как отмеченные (пронумерованные), так и неотмеченные (непронумерованные) критические точки. Однако в доказательствах иногда будем считать, что $F = F^{\mathrm{num}}$ и $F^1 = F^{1,\mathrm{num}}$ (см. определение 2.1), т.е. что все критические точки функций Морса $f \in F$ пронумерованы. Это не ограничивает общности, так как все отображения, построенные в настоящей статье, согласованы с перенумерациями тех критических точек, которые изначально не были отмечены (т.е. $\Sigma_{p''} \times \Sigma_{q''} \times \Sigma_{r''}$-эквивариантны относительно действия группы $\Sigma_{p''} \times \Sigma_{q''} \times \Sigma_{r''}$ на пространстве F^{num} перенумерациями изначально неотмеченных критических точек). Аналогично определению 2.1 и обозначению 2.2 обозначим через

$$\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}, \qquad \widehat{\mathcal{C}}_f := \widehat{\mathcal{C}}_{f,0} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,1} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,2}$$

множество всех критических точек (соответственно всех отмеченных критических точек) функции $f \in F$. Имеем включения $\mathcal{C} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_f \subseteq \mathcal{C}_f$ и $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$ множеств фиксированных критических точек, отмеченных критических точек и всех критических точек (соответственно индекса λ) функции f, $\lambda = 0, 1, 2$.

3 Построение стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ и отображений инцидентности $\chi_{[f]_{\mathrm{isot}},[g]_{\mathrm{isot}}}$

В данном параграфе предполагается, что выполнено условие (2.2) (т.е. количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$). Для каждого класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ функций Морса мы опишем построение стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, а для каждой пары примыкающих классов изотопности – соответствующее отображение инцидентности. В §4 будет описано построение "комплекса оснащенных функций Морса" $\widetilde{\mathbb{K}}$, полученного из описанных ручек при помощи описанных отображений инцидентности. Проведем построение в несколько шагов.

3.1 Построение многогранника $D_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ для класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$

Шаг 1 (определение пермутоэдра $\mathcal{P}^{q-1}$ порядка q и описание его граней). *Пермутоэдр порядка* q — это выпуклый $(q-1)$-мерный многогранник $\mathcal{P}^{q-1}$, вложенный в q-мерное пространство, вершины которого получены перестановками координат вектора $(1, \ldots, q)$ (впервые такие многогранники изучал Schoute (1911), название появилось в книге Guiband & Rosenstiehl (1963), более общие "перестановочные многогранники" с множеством вершин Σ_q изучены Bowman (1972), см. также [8, доказательство теоремы 3, шаг 1]). Опишем его подробнее: пусть $e_1, \ldots, e_q$ – стандартный базис $\mathbb{R}^q$, и пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ – выпуклая оболочка множества точек $P_\pi = \sum_{k=1}^q \left(k - \frac{q+1}{2}\right) e_{\pi_k}$, $\pi \in \Sigma_q$. Известно [37], что $\mathcal{P}^{q-1}$ – $(q-1)$-мерный выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{q-1} := (e_1 + \ldots + e_q)^\perp$,

имеющий ровно $q!$ вершин P_π, $\pi \in \Sigma_q$, причем его $(q-s)$-мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств $J_1, \dots, J_s$ (т.е. $\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$), $1 \le s \le q$. А именно, грань $\tau_J \subset \mathcal{P}^{q-1}$, отвечающая разбиению $J = (J_1, \dots, J_s)$, – это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2 - r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s - r_{s-1}})(P_\pi)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\pi \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями

$$J_1 = \{\pi_1, \dots, \pi_{r_1}\},\ J_2 = \{\pi_{r_1+1}, \dots, \pi_{r_2}\},\ \dots,\ J_s = \{\pi_{r_{s-1}+1}, \dots, \pi_{r_s}\}, \tag{3.1}$$

$\pi_1 < \dots < \pi_{r_1}, \pi_{r_1+1} < \dots < \pi_{r_2}, \dots, \pi_{r_{s-1}+1} < \dots < \pi_{r_s}$. Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s - r_{s-1}}$ – подгруппа группы Σ_q, отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1 + 1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1} + 1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\rho \in \Sigma_q$ на точке P_π дает точку $P_{\rho\pi}$, где $(\rho\pi)_i := \pi_{\rho_i}$, $1 \le i \le q$.

Упорядоченные разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ можно рассматривать как отношения частичного порядка на множестве $\{1, \dots, q\}$. Если разбиение $\widehat{J}$ получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\widehat{J} \prec J$. Из описания граней многогранника $\mathcal{P}^{q-1}$ следует, что условие $\widehat{J} \prec J$ равносильно $\tau_{\widehat{J}} \prec \tau_J$, т.е. примыканию граней (см. определение 2.4(D)).

Лемма 3.1 (о гранях пермутоэдра $\mathcal{P}^{q-1}$)**.** *Пусть фиксирована грань $\widehat{\tau} \prec \mathcal{P}^{q-1}$. Для любой грани $\tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$, такой что $\widehat{\tau} \prec \tau$, рассмотрим соответствующее разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$ и последовательность чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$. Тогда сопоставление $\tau \mapsto (|J_1|, \dots, |J_s|)$ (для $\widehat{\tau} \prec \tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$) инъективно. В частности, любой автоморфизм пермутоэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$, индуцированный перестановкой координатных осей, допустим* (см. определение 2.3(A)).

Доказательство. Пусть $\widehat{\tau} = \tau_{\widehat{J}}$, $\widehat{J} = (\widehat{J}_1, \dots, \widehat{J}_{\widehat{s}})$. Ввиду $\widehat{J} \prec J$ упорядоченное разбиение J получается из упорядоченного разбиения $\widehat{J}$ путем объединения некоторых соседних подмножеств в одно подмножество, т.е. $J_k = \bigcup\limits_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} \widehat{J}_i$, $1 \le k \le s$, для некоторых $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \widehat{s}$. Поэтому $|J_k| = \sum\limits_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} |\widehat{J}_i|$. Отсюда следует, что по разбиению $\widehat{J}$ и набору чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$ последовательность $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \widehat{s}$, а потому и разбиение J, определяются однозначно. Лемма доказана. $\square$

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in F$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} =: \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. замечание 2.9) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q \tag{3.2}$$

со стандартной евклидовой метрикой. В этом векторном пространстве рассмотрим многогранник $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$, являющийся образом многогранника $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ при какой-либо биекции $\mathcal{C}_{f,1} \to \{1, \dots, q\}$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0,$$

т.е. функцию $\boldsymbol{c}\colon \mathcal{C}_{f,1} \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$ функции f в этой точке, $1 \le j \le q$. Сопоставим 0-коцепи $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\boldsymbol{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J = J(\boldsymbol{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седловых точек $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (3.1) и $c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1+1}} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}$. (То есть, J – это отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых критических точек функции f значениями функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.) Можно также рассматривать $J = J(\boldsymbol{c})$ как сюръекцию $\mathcal{C}_{f,1} \to \{1, \dots, s\}$, переводящую $y_{\pi_j} \mapsto k$ при $r_{k-1} < j \le r_k$, $1 \le j \le q$.

В каждом классе эквивалентности $[f] \in F^1/\sim$ (соответственно классе изотопности $[f]_{\rm isot} \in F^1/\sim_{\rm isot}$) отметим ровно одну функцию Морса f этого класса, так чтобы любая функция $f \in F^1$, являющаяся отмеченной функцией класса эквивалентности $[f]$, являлась отмеченной функцией класса изотопности $[f]_{\rm isot}$. Сопоставим классу изотопности $[f]_{\rm isot}$ с отмеченной функцией f и разбиению $J(\boldsymbol{c}(f))$ грань

$$D_{[f]_{\rm isot}} = D_f := \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} \subset \mathcal{P}_f^{q-1}.$$

Шаг 3. Изучим взаимосвязь многогранников $D_{[f]_{\rm isot}}, D_{[g]_{\rm isot}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\rm isot} \prec [g]_{\rm isot}$. Для любой функции $f \in F$ и соответствующего q-мерного евклидова пространства $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. шаг 2) выполнены следующие два свойства:

1) для любого вектора $\boldsymbol{c} \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что (i) для любого $\boldsymbol{c}' \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ со свойством $|\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}| < \varepsilon_0$ выполнено $J(\boldsymbol{c}') \preceq J(\boldsymbol{c})$, и (ii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и разбиения $\widehat{J} \preceq J(\boldsymbol{c})$ существует $\boldsymbol{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойствами $|\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}| < \varepsilon$ и $J(\boldsymbol{c}') = \widehat{J}$;

2) согласно [27, утверждение 1.1 и §3], любая ("невозмущенная") функция $f \in F$ имеет столь малую окрестность $\mathbb{U}_f$ в F, что для любых ("возмущенных") функций $\widetilde{f}, \widetilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$ равенства $[\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1}]_{\rm isot}^{\rm fix} = [\widetilde{f}_1 h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1}]_{\rm isot}^{\rm fix}$ и $J((h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}))) = J((h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1)))$ равносильны, где через $h_{0;f,\widetilde{f}} \in \mathscr{D}^0$ обозначен диффеоморфизм, близкий к тождественному, такой что $h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\widetilde{f}}$, через $h_{0;f,\widetilde{f}}^{*0}\colon H_f^0 \to H_{\widetilde{f}}^0$ индуцированный изоморфизм групп 0-коцепей, а через $[\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1}]_{\rm isot}^{\rm fix}$ обозначен класс изотопности функции $\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1}$ с фиксированным множеством критических точек (при фиксированной функции f); в частности, при выполнении указанных равносильных равенств существует диффеоморфизм $h_{1;\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1},\widetilde{f}_1 h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1}} \in \mathscr{D}^0$, гомотопный id_M в пространстве гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C}_f)$ и переводящий линии уровня функции $\widetilde{f}_1 h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1}$ в линии уровня функции $\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1}$ с сохранением направления роста.

В силу этих свойств, для любой функции $f \in F^1$ имеется сюръекция $\delta[f]_{\rm isot}$ множества всех граней $\tau' \prec \tau := \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))}$ на множество всех классов изотопности $[g]_{\rm isot} \succ [f]_{\rm isot}$ (см. определение 2.4(D)), такая что $\delta[f]_{\rm isot}\colon \tau' \mapsto \delta_{\tau'}[f]_{\rm isot} := [\widetilde{f}]_{\rm isot}$ тогда и только тогда, когда

$$\tau' = \tau_{J((h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f})))} = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(g)))}, \tag{3.3}$$

где $\widetilde{f} \in \mathbb{U}_f$ и $h_{0;f,\widetilde{f}}$ как во втором свойстве выше, g — отмеченная функция класса изотопности $[\widetilde{f}]_{\rm isot}$,

$$h_{f,\tau'} := h_{0;f,\widetilde{f}} h_{1;\widetilde{f},g} \in \mathscr{D}^0, \qquad h_{f,\tau'}^{*0}\colon H_f^0 \to H_g^0 \tag{3.4}$$

— индуцированный изоморфизм, а диффеоморфизм $h_{1;\widetilde{f},g} \in \mathscr{D}^0$ переводит линии уровня функции g в линии уровня функции $\widetilde{f}$ с сохранением направления роста (он существует ввиду изотопности функций $\widetilde{f}, g$), откуда $\widetilde{f} = h_2 g h_{1;\widetilde{f},g}^{-1}$ для некоторого $h_2 \in \mathrm{Diff}^+[-1;1]$. Корректность определения сюръекции $\delta[f]_{\rm isot}$, т.е. независимость класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\rm isot} = [\widetilde{f}]_{\rm isot}$ от выбора функции $\widetilde{f} \in \mathbb{U}_f$ с заданным значением $J((h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f})))$, следует из второго свойства (см. выше). Если диффеоморфизм $\widetilde{h}_{f,\tau'} = h_{0;f,\widetilde{f}_1} h_{1;\widetilde{f}_1,g}$ построен с помощью функции $\widetilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$, такой что $J((h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}))) = J((h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1)))$, то диффеоморфизм $h_{f,\tau'}^{-1} h_{1;\widetilde{f}h_{0;f,\widetilde{f}}^{-1},\widetilde{f}_1 h_{0;f,\widetilde{f}_1}^{-1}} \widetilde{h}_{f,\tau'}$ (см. второе свойство выше) переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, а потому ввиду [31, лемма 1] принадлежит $(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g)\ (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$, откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} \widetilde{h}_{f,\tau'} \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g)\ (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)), \tag{3.5}$$

где через $\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g$ обозначена группа изотропии элемента g относительно естественного правого действия группы $\mathscr{D}^0$ на F^1, а через $\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g) \subset \mathscr{D}^0$ группа диффеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C}_g)$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары, где $\mathcal{C}_g$ — множество критических точек функции g.

Пусть $f \in F^1$ — отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} =: D_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}}$ и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathscr{D}^0$ как в (3.3) и (3.4). Тогда, ввиду равенств (3.3) и $(h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\tau_{J(\boldsymbol{c})}) = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}))}$, имеем изоморфизм граней

$$h_{f,\tau'}^{*0}|_{\tau'} \colon \tau' \longrightarrow h_{f,\tau'}^{*0}(\tau') = \tau_{J(\boldsymbol{c}(g))} = D_{[g]_{\mathrm{isot}}}. \tag{3.6}$$

Из указанных в начале шага двух свойств мы также получаем, что из $[h]_{\mathrm{isot}} \succ [g]_{\mathrm{isot}} \succ [f]_{\mathrm{isot}}$ следует $[h]_{\mathrm{isot}} \succ [f]_{\mathrm{isot}}$, и

$$\delta_{\tau''}[f]_{\mathrm{isot}} = \delta_{h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')}\delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}} \quad \text{для любых граней } \tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))}. \tag{3.7}$$

Пусть $g, g_1 \in F^1$ — отмеченные функции классов изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}}$, $\delta_{\tau''}[f]_{\mathrm{isot}}$ соответственно, и пусть $\widetilde{g} \in \mathbb{U}_g$ и $h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'') = \tau_{J((h_{0;g,\widetilde{g}}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{g})))}$ (см. (3.3), (3.7)). Покажем, что выполнен следующий аналог *соотношения транзитивности*:

$$h_{f,\tau''}^{-1} h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g_1)\ (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})), \tag{3.8}$$

где $\mathcal{C}_{g_1}$ — множество критических точек функции g_1. Действительно, функция $\widetilde{f}_1 := h_2 \widetilde{g} h_{1;\widetilde{f},g}^{-1} \in [g_1]_{\mathrm{isot}}$ близка к функции $\widetilde{f} = h_2 g h_{1;\widetilde{f},g}^{-1}$ (а потому и к функции f); диффеоморфизм $h_{1;\widetilde{f},g} h_{0;g,\widetilde{g}} h_{1;\widetilde{f},g}^{-1}$ близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции $\widetilde{f}_1$ в критические точки “невозмущенной” функции $\widetilde{f}$, а потому диффеоморфизм

$$\widetilde{h}_{0;f,\widetilde{f}_1} := h_{0;f,\widetilde{f}}\ h_{1;\widetilde{f},g} h_{0;g,\widetilde{g}} h_{1;\widetilde{f},g}^{-1} \in \mathscr{D}^0$$

близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции $\widetilde{f}_1$ в критические точки “невозмущенной” функции f; диффеоморфизм $h_{1;\widetilde{f},g} \in \mathscr{D}^0$ переводит линии уровня функции $\widetilde{g}$ в линии уровня функции $\widetilde{f}_1$ с сохранением направления роста, а потому диффеоморфизм

$$\widetilde{h}_{1;\widetilde{f}_1,g_1} := h_{1;\widetilde{f},g} h_{1;\widetilde{g},g_1} \in \mathscr{D}^0$$

переводит линии уровня функции g_1 в линии уровня функции $\widetilde{f}_1$ с сохранением направления роста. Отсюда

$$h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')} = h_{0;f,\widetilde{f}} h_{1;\widetilde{f},g}\ h_{0;g,\widetilde{g}} h_{1;\widetilde{g},g_1} = \widetilde{h}_{0;f,\widetilde{f}_1} \widetilde{h}_{1;\widetilde{f}_1,g_1},$$

т.е. мы разложили диффеоморфизм $h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^{*0}(\tau'')}$ в композицию, аналогичную разложению $h_{f,\tau''} = h_{0;f,\widetilde{f}_1} h_{1;\widetilde{f}_1,g_1}$, см. (3.4). Ввиду (3.5) это доказывает (3.8).

Если $h \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$, а τ', g как выше, то ввиду (3.3) выполнено $h^{*0}(\tau') = \tau_{J((h_{0;f,\widetilde{f}h}^{-1})^{*0}(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}h)))}$ и $\delta_{h^{*0}(\tau')}[f]_{\mathrm{isot}} = [gh]_{\mathrm{isot}} = [g]_{\mathrm{isot}}$ (ввиду $h \in \mathscr{D}^0$), откуда $h_{f,h^{*0}(\tau')} = h_{0;f,\widetilde{f}h} h_{1;\widetilde{f}h,g}$
$= h_0 h^{-1} h_{0;f,\widetilde{f}} h\ h^{-1} h_{1;\widetilde{f},g} h_1 = h_0 h^{-1} h_{f,\tau'} h_1$ для некоторых $h_0 \in \mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ и $h_1 \in \mathscr{D}^0$, таких что h_1 переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, поэтому $h_1 \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g)(\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$ ввиду [31, лемма 1], откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} h h_{f,h^{*0}(\tau')} \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g)\ (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)). \tag{3.9}$$

3.2 Построение утолщенного цилиндра $\mathbb{S}_{[f]_{\rm isot}}$ для класса изотопности $[f]_{\rm isot}$

Шаг 4. Пусть $f \in F^1$ — отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\rm isot}$. По аналогии с пространством 0-коцепей $H^0_f \cong \mathbb{R}^q$ (см. (3.2)) введем двойственные друг другу векторные пространства относительных 1-гомологий и относительных 1-когомологий над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_{f,1} &:= H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \\ H^1_f &:= H^1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где изоморфизм $H^1_f \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ индуцирован равенством $C^q(X, A; \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(C_q(X)/C_q(A), \mathbb{R})$ для пары Борсука $(X, A) := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1})$ при $q = 1$ (см. [36, §§12.5, 15.2, 15.5]). Рассмотрим ориентированный граф $G_f \subset M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, см. обозначение 2.5. Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y_1, \dots, y_q \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит в графе $2q$ ребер, которые обозначим $e_1, \dots, e_{2q}$. Обозначим относительный гомологический класс ориентированного ребра e_i через $[e_i] \in H_{f,1}$, $1 \le i \le 2q$.

Определим в векторном пространстве $H^1_f \cong \mathbb{R}^{2q}$ выпуклые подмножества

$$U_{[f]_{\rm isot}} \subset U^\infty_{[f]_{\rm isot}} \subset H^1_f \tag{3.11}$$

системами из $4q$ и $2q$ неравенств соответственно:

$$U_{[f]_{\rm isot}} = U_f := \left\{ u \in H^1_f \;\middle|\; 1 \le u([e_i]) \le \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!},\ 1 \le i \le 2q \right\}, \tag{3.12}$$

$$U^\infty_{[f]_{\rm isot}} = U^\infty_f := \left\{ u \in H^1_f \mid u([e_i]) > 0,\ 1 \le i \le 2q \right\}, \tag{3.13}$$

где $s = s(\boldsymbol{c}(f)) := |f(\mathcal{C}_{f,1})|$ – количество седловых значений функции f.

Шаг 5. Каждая компонента связности пространства $M \setminus G_f$ содержит не более одной критической точки функции f (а именно, точки минимума или максимума) и не более одной компоненты связности края ∂M, и гомеоморфна либо открытому кругу (с одной критической точкой), либо полуоткрытому цилиндру $S^1 \times [-1; 0)$ или $S^1 \times (0; 1]$ (с одной компонентой края $S^1 \times \{\pm 1\} \subset \partial^\pm M$), либо “открытому цилиндру”

$$Z_\ell = Z_\ell(f) \approx S^1 \times (0; 1), \quad 1 \le \ell \le n = n(f), \tag{3.14}$$

которые вместе со своим замыканием содержатся в $(\mathrm{int}\, M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где $n = n(f)$ — количество открытых цилиндров. Сопоставим открытому цилиндру Z_ℓ его серединную окружность

$$\gamma_\ell = \gamma_\ell(f) = S^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \subset Z_\ell = S^1 \times (0; 1) \tag{3.15}$$

и следующее линейное векторное поле v_ℓ на векторном пространстве H^1_f. Значение $v_\ell(u) \in H^1_f$ поля v_ℓ в любой точке $u \in H^1_f$ — это относительный 1-коцикл, значение которого на любом относительном 1-цикле $a \in H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}) \subset H_{f,1}$ определяется формулой

$$v_\ell(u)([a]) := \langle [\gamma_\ell], a \rangle\ u([\gamma_\ell]), \quad u \in H^1_f,\ a \in H_1\left(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}\right), \tag{3.16}$$

где $\langle [\gamma_\ell], a \rangle$ — индекс пересечения цикла $[\gamma_\ell] \in H_1(M \setminus \mathcal{C}_f) \subset H_{f,1}$ и относительного цикла a, $1 \le \ell \le n$. Другими словами, линейное векторное поле v_ℓ на H^1_f задается $\mathbb{R}$-линейным оператором $H^1_f \to H^1_f$, являющимся обратным образом при изоморфизме $H^1_f \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-линейного оператора $H_{f,1} \to H_{f,1}$, $a \mapsto \langle [\gamma_\ell], a \rangle [\gamma_\ell]$. На шаге 6 мы установим свойства векторных полей $v_1, \dots, v_n$. Определим диффеоморфизм

$$h_\ell := t_{\gamma_\ell} \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}} f \subset \mathscr{D}, \quad 1 \le \ell \le n, \tag{3.17}$$

как *скручивание Дэна* t_{γ_ℓ} (см. [38]) вокруг окружности γ_ℓ (скручивание Дэна t_{γ_ℓ} совпадает с id_M вне открытого цилиндра Z_ℓ и получается с помощью разрезания поверхности вдоль окружности γ_ℓ, перекручивания одного конца разреза на 2π и склеивания). Диффеоморфизмы h_ℓ, $1 \le \ell \le n$, попарно коммутируют, так как их носители попарно не пересекаются. Рассмотрим порожденную ими абелеву группу

$$\Theta_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \Theta_f := \langle h_1, \dots, h_n \rangle \subset \mathrm{stab}_{\mathscr{D}} f \subset \mathscr{D}.$$

Рассмотрим индуцированные автоморфизмы $h_\ell^* \in \mathrm{Aut}(H^1_f)$, $1 \le \ell \le n$, и порожденную ими абелеву группу

$$\Theta^*_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \Theta_f = \langle h_1^*, \dots, h_n^* \rangle \subset \mathrm{Aut}(H^1_f). \tag{3.18}$$

Нетрудно показать, что подгруппа $\Theta^*_f \subset \mathrm{Aut}(H^1_f)$ изоморфна свободной абелевой группе ранга n, и что автоморфизм h_ℓ^* совпадает с потоком $g^1_{v_\ell}\colon H^1_f \to H^1_f$ векторного поля v_ℓ за время 1, $1 \le \ell \le n$. Рассмотрим в группе $\Theta^*_f \cong \mathbb{Z}^n$ подгруппу $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta^*_f$ и рассмотрим пространства орбит

$$\mathbb{S}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \mathbb{S}_f := U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*, \quad \mathbb{S}^\infty_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \mathbb{S}^\infty_f := U^\infty_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*.$$

Рассуждения на следующих шагах проводятся для U_f, но верны и для U^∞_f.

Шаг 6. На этом шаге определяется свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на пространстве $\mathbb{S}_f$, где $d = d([f])$ — ранг группы $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ (как свободной абелевой группы).

Построим явно базис векторного пространства $H^1_f \cong \mathbb{R}^{2q}$. Если количество $n = n(f)$ открытых цилиндров $Z_\ell \subset M \setminus G_f$ (см. (3.14)) равно нулю, положим $\widetilde{G}_f := G_f$. Если $n > 0$, будем выкидывать из графа G_f по одному (открытому) ребру, чтобы каждый раз количество компонент связности дополнения графа в M, не пересекающихся с $(\partial M) \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$, уменьшалось на 1. Так как для графа G_f указанное количество равно n, то после выкидывания из него n ребер (для определенности $e_1, \dots, e_n$) указанным алгоритмом их количество станет равным нулю, и получится подграф с q вершинами и $2q - n$ ребрами $e_{n+1}, \dots, e_{2q}$. В каждом открытом цилиндре Z_ℓ проведем (отрытое) ориентированное ребро $\widetilde{e}_\ell$, гладко вложенное в этот цилиндр, с концами в седловых точках, такое, что ограничение функции f на это ребро монотонно возрастает. Добавим к полученному подграфу n ориентированных ребер

$$\widetilde{e}_\ell \subset Z_\ell, \qquad 1 \le \ell \le n$$

(взамен выброшенных $e_1, \dots, e_n$). В результате получим граф $\widetilde{G}_f \subset (\mathrm{int}\, M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ с $2q$ ребрами $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n$, $e_{n+1}, \dots, e_{2q}$ и q вершинами $y_1, \dots, y_q$. Так как дополнение графа $\widetilde{G}_f$ в поверхности M состоит из открытых кругов (содержащих по одной точке минимума или максимума) и полуоткрытых цилиндров (содержащих по одной компоненте края M), то граф $\widetilde{G}_f$ является сильным деформационным ретрактом поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Следовательно, вложение $\widetilde{G}_f \hookrightarrow M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ индуцирует изоморфизмы $2q$-мерных векторных пространств

$$H_1(\widetilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1}, \quad H^1(\widetilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H^1_f.$$

Относительные классы гомологий $[\widetilde{e}_1], \dots, [\widetilde{e}_n]$, $[e_{n+1}], \dots, [e_{2q}] \in H_1(\widetilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$ ориентированных ребер графа $\widetilde{G}_f$ образуют базис векторного пространства $H_1(\widetilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1} \cong \mathbb{R}^{2q}$. Переход к двойственному базису дает базис $[\widetilde{e}_1]^*, \dots, [\widetilde{e}_n]^*$, $[e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$ векторного пространства $H^1(\widetilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H^1_f \cong (H_{f,1})^* \cong \mathbb{R}^{2q}$.

Пусть $\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_n, u'_{n+1}, \dots u'_{2q}$ – координаты в H^1_f по отношению к базису $[\widetilde{e}_1]^*, \dots, [\widetilde{e}_n]^*$, $[e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$. Рассмотрим разложение

$$H^1_f = \langle [\widetilde{e}_1]^*, \dots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle \oplus \langle [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^* \rangle. \tag{3.19}$$

Представим любой относительный коцикл $u \in H^1_f$ как сумму $u = \widetilde{u} + u'$ его проекций на подпространства в разложении (3.19). Нетрудно доказывается, что

$$[e_i] \in \langle [e_{n+1}], \ldots, [e_{2q}] \rangle = \operatorname{Im}\left[H_1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \to H_{f,1}\right], \quad 1 \le i \le 2q, \tag{3.20}$$

$$\langle [\widetilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n = \ker\left[H^1_f \to H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})\right], \quad \langle [e_i]^* \rangle_{i=n+1}^{2q} \cong H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}).$$

Отсюда $u([e_i]) = u'([e_i])$, $1 \le i \le 2q$. Положим

$$U'_f := \left\{ u' \in \langle [e_i]^* \rangle_{i=n+1}^{2q} \;\middle|\; 1 \le u'([e_\ell]) \le \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!},\ 1 \le \ell \le 2q \right\}, \tag{3.21}$$

ср. (3.12). Тогда $u \in U_f$ в том и только том случае, когда $u' \in U'_f$, причем U'_f – выпуклый многогранник. Поэтому справедливо разложение

$$U_f = \langle [\widetilde{e}_1]^*, \ldots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle \oplus U'_f, \qquad \text{где} \quad U'_f \subset \langle [e_{n+1}]^*, \ldots, [e_{2q}]^* \rangle. \tag{3.22}$$

В базисе $[\widetilde{e}_1]^*, \ldots, [\widetilde{e}_n]^*$, $[e_{n+1}]^*, \ldots, [e_{2q}]^*$ пространства H^1_f линейные векторные поля $v_1, \ldots, v_n$ на H^1_f имеют вид

$$v_\ell(u) = u([\gamma_\ell])\ [\widetilde{e}_\ell]^*, \quad \langle v_\ell(u) \rangle_{\ell=1}^n \subseteq \langle [\widetilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n = \ker\left[H^1_f \to H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})\right], \tag{3.23}$$

т.е. касательны каждой n-мерной плоскости $\langle [\widetilde{e}_1]^*, \ldots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset H^1_f$, $u' \in \langle [e_{n+1}]^*, \ldots, [e_{2q}]^* \rangle$, и всюду на ней имеют постоянные коэффициенты ввиду (3.20). Поэтому каждая такая n-мерная плоскость инвариантна относительно потоков векторных полей $v_1, \ldots, v_n$ на H^1_f и эти поля коммутируют. Так как при $u' \in U'_f$ эти векторные поля (с постоянными коэффициентами) линейно независимы в указанной плоскости, то их потоки $g^{t_1}_{v_1} \ldots g^{t_n}_{v_n}$ порождают свободное действие группы $\mathbb{R}^n$ на пространстве U_f, см. (3.22), причем орбиты этого действия являются n-мерными плоскостями $\langle [\widetilde{e}_1]^*, \ldots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset U_f$, $u' \in U'_f$. Так как группа $\mathbb{R}^n$ действует свободно на U_f, то ее стандартная целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ тоже действует свободно на U_f. Так как действие ℓ-го базисного элемента решетки $\mathbb{Z}^n$ совпадает с ℓ-ым базисным элементом $g^1_{v_\ell} = h^*_\ell \in \operatorname{Aut}(H^1_f)$ группы $\Theta^*_f \cong \mathbb{Z}^n$ (см. (3.17), (3.18)), то действие группы $\Theta^*_f \subset \operatorname{Aut}(H^1_f)$ на U_f свободно и коммутирует с действием $\mathbb{R}^n$ на U_f (заданным при помощи потоков векторных полей $v_1, \ldots, v_n$). Поэтому действие группы $\mathbb{R}^n$ на U_f индуцирует корректно определенное свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на факторпространстве $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, где $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong Z^d \subset \mathbb{Z}^n$ — подгруппа группы $\Theta^*_f \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, и через $d = d([f])$ обозначен ее ранг (как ранг свободной абелевой группы).

Все рассуждения данного шага верны для $U^\infty_f, (U'_f)^\infty$ вместо U_f, U'_f, где $(U'_f)^\infty$ определяется аналогично (3.21).

Шаг 7. На этом шаге вводится на пространстве $\mathbb{S}_f$ структура утолщенного цилиндра (см. определение 2.3). Для этого будут построены специальные (криволинейные) координаты на выпуклом множестве $U_f \subset H^1_f$ и на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, в которых построенные выше свободные действия группы $\mathbb{R}^n$ на U_f и цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на $\mathbb{S}_f$ "выпрямляются".

Построим явно набор образующих группы $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta^*_f \subset \operatorname{Aut}(H^1_f)$. Напомним, что набором свободных образующих группы $\Theta^*_f \cong \mathbb{Z}^n$ является набор автоморфизмов $h^*_1, \ldots, h^*_n \in \operatorname{Aut}(H^1_f)$, отвечающих открытым цилиндрам $Z_1, \ldots, Z_n$, где $n = n(f)$, см. (3.14). Покажем, что после подходящей перенумерации цилиндров Z_ℓ (и отвечающих им автоморфизмов h^*_ℓ) подгруппа $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta^*_f \cong \mathbb{Z}^n$ раскладывается в прямое произведение подгрупп

$$(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* = \Theta^*_{f,0} \times \Theta^*_{f,1} \times \ldots \times \Theta^*_{f,e}, \qquad \text{где} \quad \Theta^*_{f,0} = \langle h^*_1, \ldots, h^*_{\nu_0} \rangle, \tag{3.24}$$

$$\Theta^*_{f,k} = \langle (h^*_{\nu_{k-1}+1})^{-1} h^*_{\nu_{k-1}+2},\ (h^*_{\nu_{k-1}+2})^{-1} h^*_{\nu_{k-1}+3},\ \ldots\ ,\ (h^*_{\nu_k - 1})^{-1} h^*_{\nu_k} \rangle,\ 1 \le k \le e,$$

где целые числа $0 \le e \le n$ и $0 = \nu_{-1} \le \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_e \le n$ зависят от $[f]$. Отсюда следует, что ранг группы $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ равен

$$\operatorname{rank}(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* = d = \nu_e - e. \tag{3.25}$$

Из (3.25) нетрудно вывести, что он не превосходит числа $p'+p''+r'+r''$ "плавающих" точек локальных минимумов и максимумов, а также получить остальные оценки для d из теоремы 2.6(C).

Описание построения подгруппы $\Theta_{f,0} \subset \mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$. Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров $Z_1, \ldots, Z_n$ в (3.14) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$) окружности $\gamma_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}_f \subset M \setminus \mathcal{C}$, $1 \le \ell \le \nu_0$ – это все такие окружности множества $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, каждая из которых разбивает поверхность $M \setminus \mathcal{C}$ на две части (см. определение 2.1, обозначение 2.2, замечание 2.9), причем объединение одной из этих двух частей с окружностью γ_ℓ гомеоморфно либо кругу, либо проколотому кругу (т.е. кругу без одной внутренней точки), либо цилиндру $S^1 \times [0;1]$. Рассмотрим скручивания Дэна $h_j \in \operatorname{stab}_{\mathscr{D}} f$ вокруг этих окружностей, $1 \le j \le \nu_0$. Каждое такое скручивание Дэна принадлежит группе $\mathscr{D}^0$, т.е. компоненте связности тождественного диффеоморфизма id_M в $\operatorname{Diff}(M, \mathcal{C})$. Значит, все элементы построенного подмножества $\{h_1, \ldots, h_{\nu_0}\} \subset \{h_1, \ldots, h_\ell\}$ принадлежат группе $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$. Определим подгруппу $\Theta_{f,0} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами h_ℓ, $1 \le \ell \le \nu_0$.

Описание построения подгрупп $\Theta_{f,1}, \ldots, \Theta_{f,e} \subset \mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$. Рассмотрим объединение всех цилиндров в поверхности $M \setminus \mathcal{C}$, ограниченных парами различных окружностей из множества $\{\gamma_{\nu_0+1}, \ldots, \gamma_n\}$ и не содержащих внутри себя других окружностей этого множества. Это объединение является либо несвязным объединением $e \ge 0$ цилиндров, либо тором (в этом случае $M = T^2$, $p^* = q^* = r^* = 0$ и $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} \ge 1$ ввиду (2.2), т.е. все критические точки "плавают" и по крайней мере одна из них отмечена, а окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \ldots, \gamma_n$ попарно изотопны в торе M); в последнем случае положим $e = 1$, $\nu_1 = n$, и заменим указанное объединение цилиндров на один цилиндр, содержащий все окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \ldots, \gamma_n$ и ограниченный двумя из этих окружностей, причем этот цилиндр не содержит первую отмеченную критическую точку (эти условия определяют цилиндр однозначно). Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров $Z_{\nu_0+1}, \ldots, Z_n$ в (3.14) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_{\nu_0+1}, \ldots, \gamma_n$) окружности γ_ℓ, $\nu_{k-1} < \ell \le \nu_k$ – это все окружности в k-ом из этих e цилиндров, причем можем и будем считать, что нумерация окружностей идет в порядке следования этих окружностей в k-ом цилиндре, $1 \le k \le e$. Композиция $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$ скручиваний Дэна h_ℓ и $h_{\ell+1}$, взятых в противоположных степенях, принадлежит группе $\mathscr{D}^0$ при $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \le k \le e$. При $1 \le k \le e$ определим подгруппу $\Theta_{f,k} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$.

Покажем, что группа $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ допускает разложение (3.24). Осталось показать, что $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f \subseteq \Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \ldots \times \Theta_{f,e}$. Дополним набор диффеоморфизмов $h_1, \ldots, h_{\nu_0} \in \Theta_{f,0}$, $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1} \in \Theta_{f,k}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \le k \le e$, до набора образующих группы $\Theta_f \cong \mathbb{Z}^n$ набором скручиваний Дэна h_i, $i \in A = A(f)$, где

$$A = A(f) := \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_e,\ \nu_e + 1, \nu_e + 2, \ldots, n\} \subset \{1, \ldots, n\}, \quad |A| = n - \nu_e + e.$$

Пусть некоторая композиция $h \in \Theta_f$ целых степеней диффеоморфизмов полученного набора образующих принадлежит группе $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$. Покажем, что показатель степени каждого из $|A| = n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов h_i, $i \in A$, в этой композиции равен нулю. Произведение $\widetilde{h}$ этих $n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов в тех степенях, в которых они входят в композицию h, также является элементом группы $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$, так как отличается от исходной композиции h домножением на элемент из подгруппы $\Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \ldots \times \Theta_{f,e}$, содержащейся в $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$ по построению. Значит, $\widetilde{h} \in \mathscr{D}^0 \cap \Theta_f \subset \mathscr{D}^0$. Так как окружности $\gamma_i \subset (\operatorname{int} M) \setminus \mathcal{C}$, $i \in A$, попарно не пересекаются, никакая из них не ограничивает цилиндр или (проколотый или непроколотый) круг в $M \setminus \mathcal{C}$, и никакие две из них не ограничивают цилиндр в $M \setminus \mathcal{C}$, то скручивания Дэна h_i, $i \in A$, вокруг этих окружностей (рассматриваемые с точностью до гомотопии в пространстве непрерывных отображений пары $(M, \mathcal{C})$) порождают подгруппу

группы $\mathrm{Homeo}(M,\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)/\mathrm{Homeo}^0(M,\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) \cong \mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ классов отображений, изоморфную свободной абелевой группе ранга $|A| = n - \nu_e + e$ (см., например, [39, лемма 2.1(1)] или [40]). Поэтому показатели степеней всех диффеоморфизмов h_i, $i \in A$, равны 0. Это завершает доказательство разложения (3.24).

Построим специальные (криволинейные) координаты в $U_f \subset U_f^\infty$, в которых свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ (см. конец шага 6) "выпрямляется". Пусть нумерация цилиндров $Z_1, \dots, Z_n$ такая же, как в (3.24). Для любого $u' \in U_f'$ рассмотрим базис $v_1(u'), \dots, v_n(u')$ в плоскости $\langle [\widetilde{e}_1]^*, \dots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset U_f$ и новый базис

$$\widetilde{v}_i(u') := v_i(u'),\ i \in A \cup \{1, \dots, \nu_0\}, \quad \widetilde{v}_j(u') := v_j(u') - v_{j+1}(u'),\ j \in B \setminus \{1, \dots, \nu_0\}, \tag{3.26}$$

а также отвечающее этому базису разложение

$$\ker \left[H_f^1 \to H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \right] = \langle [\widetilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n = \left\langle \widetilde{v}_i(u') \right\rangle_{i \in A} \oplus \left\langle \widetilde{v}_j(u') \right\rangle_{j \in B},$$

где $B = B(f) := \{1, \dots, n\} \setminus A$. Тогда для каждого $u' \in U_f' \subset (U_f')^\infty$ любой коцикл $\widetilde{u} = \sum_{\ell=1}^n \widetilde{u}_j [\widetilde{e}_j]^* \in \langle [\widetilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n$ имеет вид

$$\widetilde{u} = \sum_{i \in A} x_i\ \widetilde{v}_i(u') + \sum_{j \in B} \varphi_j\ \widetilde{v}_j(u'),$$

где координаты x_i, φ_j ($i \in A$, $j \in B$) в n-мерной плоскости $\langle [\widetilde{e}_1]^*, \dots, [\widetilde{e}_n]^* \rangle + u'$ выражаются через координаты $\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_n$, $u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}$, по формулам

$$x_i = \frac{\widetilde{u}_i}{u'([\gamma_i])}, \quad \nu_e < i \le n, \qquad x_{\nu_k} = \frac{\widetilde{u}_{\nu_{k-1}+1}}{u'([\gamma_{\nu_{k-1}+1}])} + \ldots + \frac{\widetilde{u}_{\nu_k}}{u'([\gamma_{\nu_k}])}, \quad 1 \le k \le e, \tag{3.27}$$

$$\varphi_j = \frac{\widetilde{u}_j}{u'([\gamma_j])}, \quad 1 \le j \le \nu_0, \qquad \varphi_j = \frac{\widetilde{u}_{\nu_{k-1}+1}}{u'([\gamma_{\nu_{k-1}+1}])} + \ldots + \frac{\widetilde{u}_j}{u'([\gamma_j])}, \quad \nu_{k-1} < j < \nu_k.$$

Знаменатели в выражениях для x_i и φ_j положительны, так как $u' \in (U_f')^\infty$. Таким образом, на множестве U_f^∞ мы ввели гладкие регулярные координаты $x_i \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \bmod 1 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ($i \in A$, $j \in B$), $(u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}) \in U_f'$. В этих координатах векторные поля $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_n$ имеют вид $\widetilde{v}_i = \partial/\partial x_i$, $\widetilde{v}_j = \partial/\partial \varphi_j$ ($i \in A$, $j \in B$), а множества U_f и $\mathbb{S}_f$ имеют вид

$$U_{[f]_{\mathrm{isot}}} = U_f \approx (\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^B) \times U_f' \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times \mathbb{R}^{\nu_e - e}) \times U_f' = \mathbb{R}^n \times U_f',$$

$$\mathbb{S}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \mathbb{S}_f \approx (\mathbb{R}^A \times (S^1)^B) \times U_f' \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e - e}) \times U_f'.$$

Отсюда действие группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат x_i, φ_j ($i \in A, j \in B$), действие группы $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong \mathbb{Z}^{\nu_e - e}$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат φ_j, $j \in B$, а действие цилиндра $\mathbb{R}^A \times (S^1)^B \cong \mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e-e}$ на $\mathbb{S}_f$ совпадает с естественным действием цилиндра сдвигами по себе. Итак, мы ввели на $\mathbb{S}_f := U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ структуру стандартного утолщенного цилиндра (см. определение 2.3).

Подмножества $U_f \subset U_f^\infty \subset H_f^1$ инвариантны относительно правого действия группы $(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^* \subset \mathrm{Aut}(H_f^1)$ на H_f^1, а подгруппа $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0$ нормальна в $\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$, где через $(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0$ обозначена подгруппа группы $\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$, состоящая из всех диффеоморфизмов поверхности M, сохраняющих функцию f и гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M, сохраняющих функцию f. Поэтому имеется индуцированное правое действие дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \Gamma_f := (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)/((\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0) \tag{3.28}$$

на пространствах орбит $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ и $\mathbb{S}_f^\infty = U_f^\infty/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$. Так как действие группы Θ_f на H_f^0 тривиально (поскольку не переставляет седловые критические точки), имеем также индуцированное правое действие группы Γ_f на многограннике D_f (см. шаг 2).

Лемма 3.2. *Если выполнено условие* (2.2), *то индуцированное покомпонентное правое действие любого диффеоморфизма $h \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$ на прямом произведении*

$$D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} \times \big(U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*\big) \approx \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} \times \Big(\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)} \times U'_f\Big) \tag{3.29}$$

является допустимым автоморфизмом стандартной цилиндрической ручки (см. определение 2.3(B)).

Доказательство. Пусть для определенности окружности $\gamma_\ell \subset Z_\ell$ определены условием $f(\gamma_\ell) = \frac{1}{2}(\sup f|_{Z_\ell} + \inf f|_{Z_\ell})$. Тогда любой диффеоморфизм $h \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$ индуцирует перестановку на множестве окружностей γ_ℓ, $1 \le \ell \le n = n(f)$. При этой перестановке каждая окружность $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ переходит в себя (см. доказательство леммы 3.3, шаг 1). То есть, переставляются только окружности γ_ℓ, $\ell \in \{1, \dots, \nu_0\} \subset B(f)$ (и отвечающие им векторные поля $\widetilde{v}_\ell$), а соответствующая перестановка $\pi \in \Sigma_{|A(f)|}$ тривиальна (см. определение 2.3(A)). Если тривиальны также соответствующие автоморфизмы многогранников $b\colon D_f \to D_f$, $a\colon U'_f \to U'_f$ и перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$, то h переводит в себя каждое седло, каждое ориентированное ребро графа G_f, и каждую окружность γ_ℓ, а потому принадлежит $(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0$, откуда его действие на $D_f \times \mathbb{S}_f$ совпадает с тождественным отображением. Если автоморфизм многогранника $b\colon D_f \to D_f$ тривиален (что равносильно тому, что h переводит каждое седло в себя), то перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$ окружностей γ_ℓ тоже тривиальна, так как в противном случае h нетривиально действует на $H_1(M)$; тривиальность автоморфизма $a^2\colon U'_f \to U'_f$ следует из того, что h^2 переводит каждое ребро графа G_f в себя. Пусть теперь автоморфизм многогранника $a\colon U'_f \to U'_f$ тривиален. Покажем, что автоморфизм многогранника $b\colon D_f \to D_f$ тоже тривиален. Если количество седловых значений $s(f) > 1$, то U'_f является $(2q - n(f))$-мерным многогранником, поэтому из тривиальности автоморфизма $a\colon U'_f \to U'_f$ следует, что h переводит в себя каждое ребро графа G_f, а потому и каждое седло, откуда $b\colon D_f \to D_f$ тривиален. Если $s(f) = 1$, то по лемме 3.3 ниже отображение h переводит в себя хотя бы одно ребро графа G_f (а потому и каждое его ребро ввиду связности графа G_f, а потому и каждую седловую точку), откуда автоморфизм $b\colon D_f \to D_f$ тривиален. Так как автоморфизм $b\colon D_f \to D_f$ является ограничением автоморфизма многогранника $\mathcal{P}_f^{q-1}$, индуцированного перестановкой координатных осей, то по лемме 3.1 он допустим. Лемма 3.2 доказана. ◻

Шаг 8. Изучим взаимосвязь утолщенных цилиндров $\mathbb{S}_{[f]_{\mathrm{isot}}}, \mathbb{S}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\mathrm{isot}} \prec [g]_{\mathrm{isot}}$. Пусть $f \in F^1$ — отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} =: D_{[f]_{\mathrm{isot}}} = D_f$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}}$ (см. (3.3)) и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathscr{D}^0$ как в (3.3) и (3.4). Рассмотрим индуцированный изоморфизм

$$h^*_{f,\tau'}\colon H^1_f \to H^1_g$$

векторных пространств, аналогичный изоморфизму $h^{*0}_{f,\tau'}\colon H^0_f \to H^0_g$ из (3.4). Докажем включения

$$h^*_{f,\tau'}(U_f) \subset U_g, \qquad h^*_{f,\tau'}(U^\infty_f) \subset U^\infty_g. \tag{3.30}$$

Пусть, как и выше, $s = s(f)$ – количество седловых критических значений функции f, и $k := q - s$ — размерность многогранника D_f (см. шаги 1, 2). С учетом определения $U_f \subset U^\infty_f \subset H^1_f$ (см. (3.12), (3.13)), нам достаточно показать, что сопряженный к изоморфизму $h^*_{f,\tau'}$ изоморфизм $(h_{f,\tau'})_*\colon H_{g,1} = H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{g,0} \cup \mathcal{C}_{g,2}), \mathcal{C}_{g,1}; \mathbb{R}) \to H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = H_{f,1}$ переводит гомологический класс любого ориентированного ребра графа G_g в сумму гомологических классов некоторых ориентированных ребер графа G_f (см. определение графа G_f в обозначении 2.5), и что количество этих ребер всегда $\le 2k + 1$.

Обозначим через C_g компоненту связности графа G_g, в которой лежит рассматриваемое ребро графа G_g. Дополнение графа G_f в поверхности M распадается на “открытые цилиндры” $Z_\ell(f) \approx$

$S^1 \times (0;1)$, $1 \le \ell \le n = n([f])$, “полуоткрытые цилиндры” $S^1 \times [0;1)$ и открытые круги, содержащие ровно одну критическую точку минимума или максимума функции f. Поэтому имеется ретракция

$$\varrho_f\colon\ M'_f := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})) \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{n} \gamma_\ell(f)\right) \to G_f,$$

где $\gamma_\ell(f) = S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset Z_\ell(f)$. Более точно, определим эту ретракцию так, чтобы она переводила любую точку поверхности M'_f в точку пересечения проходящей через нее интегральной траектории векторного поля $\operatorname{grad} f|_{M'_f}$ (в смысле некоторой фиксированной римановой метрики ds_0^2 на M) с графом G_f. Без ограничения общности мы также будем считать, что функция $\widetilde{f}$ и диффеоморфизм $h_{0;f,\widetilde{f}}$ в определении диффеоморфизма $h_{f,\tau'}$ (см. (3.4)) строились так: фиксируем попарно непересекающиеся круги вокруг седловых точек функции $f \in F^1$ и потребуем, чтобы в каждом из них $\widetilde{f} = f + \mathrm{const}$, и чтобы $h_{0;f,\widetilde{f}} = \mathrm{id}_M$ и функция $\widetilde{f} \in F^1$ была получена при помощи C^2-малого возмущения функции f. Тогда $h_{f,\tau'}(G_g) \subset M'_f$, причем отображение

$$p_{f,\tau'} := \varrho_f \circ h_{f,\tau'}|_{C_g}\colon\ C_g \to G_f \tag{3.31}$$

является погружением графов, переводит множество вершин на множество вершин согласно биекции $h_{f,\tau'}|_{\mathcal{C}_g}\colon\ \mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_f$ и сохраняет ориентацию ребер. Отсюда получаем, что $p_{f,\tau'}$ переводит любое ориентированное ребро графа G_g в ориентированный путь на графе G_f, ориентация которого согласована с ориентацией ребер графа G_f.

Осталось показать, что длина указанного пути на графе G_f (т.е. количество проходимых этим путем ребер графа G_f) не превосходит $2k+1$. Пусть C_f – компонента связности графа G_f, в которой лежит рассматриваемый путь. Граф C_f имеет не более $k+1$ вершины (так как число компонент связности графа G_f не меньше чем $s = q-k$), а потому он имеет не более $2k+2$ ребер. Но наше ребро является собственным подграфом графа C_g, а потому наш путь является собственным подграфом графа $p_{f,\tau'}(C_g) \subset C_f$. Так как граф C_f имеет не более $2k+2$ ребер, наш путь имеет не более $2k+1$ ребер, что и требовалось. Это завершает доказательство включений (3.30).

Изоморфизм $h^*_{f,\tau'}\colon\ H^1_f \xrightarrow{\cong} H^1_g$ индуцирует изоморфизм

$$\widehat{h}_{f,\tau'}\colon\ \mathrm{Aut}(H^1_f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(H^1_g), \quad h^* \mapsto h^*_{f,\tau'} h^* (h^*_{f,\tau'})^{-1}, \qquad h^* \in \mathrm{Aut}(H^1_f).$$

Рассмотрим вложение множеств окружностей $\{\gamma_\ell(f)\}_{\ell=1}^{n(f)} \hookrightarrow \{\gamma_m(g)\}_{m=1}^{n(g)}$, сопоставляющее окружности $\gamma_\ell(f)$ окружность $\gamma_{m(\ell)}(g)$, такую что $h^{-1}_{f,\tau'}(\gamma_\ell(f)) \subset Z_{m(\ell)}(g)$. Тогда для каждого векторного поля $v_\ell(f)$ на H^1_f (см. (3.16) и (3.23)) выполнено $(h^*_{f,\tau'})_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$. Отсюда $\widehat{h}_{f,\tau'}(\Theta^*_f) \subset \Theta^*_g$, а потому

$$\widehat{h}_{f,\tau'}((\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*) \subset (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^*.$$

Поэтому вложение $h^*_{f,\tau'}|_{U_f}\colon\ U_f \hookrightarrow U_g$ (см. (3.30)) индуцирует корректно определенное отображение пространств орбит

$$[h^*_{f,\tau'}|_{U_f}]\colon\ U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^* \looparrowright U_g/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^*, \tag{3.32}$$

являющееся погружением утолщенных цилиндров (так как группа Θ^*_f действует свободно и дискретно на U_f, см. шаги 6 и 7).

Докажем, что погружение (3.32) утолщенных цилиндров является допустимым (см. определение 2.3,(D)). Из $(h^*_{f,\tau'})_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$, $1 \le \ell \le n$, (3.26) и описания подгруппы $\Theta_{f,k} \subset \mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. шаг 7) следует, что при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \le k \le e(f)$, выполнено

$$(h^*_{f,\tau'})_*(\widetilde{v}_j(f)) = (h^*_{f,\tau'})_*(v_j(f) - v_{j+1}(f)) = v_{m(j)}(g) - v_{m(j+1)}(g)$$

$$= (v_{m(j)}(g) - v_{m(j)+\eta_k}(g)) + (v_{m(j)+\eta_k}(g) - v_{m(j)+2\eta_k}(g)) + \dots$$
$$= \eta_k(\widetilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + \widetilde{v}_{m(j)+(3\eta_k-1)/2}(g) + \dots + \widetilde{v}_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g)),$$

где $\eta_k = \eta_k(f,g) := \operatorname{sgn}(m(\nu_k-1) - m(\nu_k))$. Отсюда следует, что при вложении $h^*_{f,\tau'}|_{U_f}\colon U_f \hookrightarrow U_g$ коммутирующие векторные поля (a) $\widetilde{v}_i(f)$, $i \in A(f)$, (b) $\widetilde{v}_j(f)$, $j \in B(f)$, на U_f (потоки которых задают свободное действие группы $\mathbb{R}^{A(f)} \times \mathbb{R}^{B(f)}$ на U_f и свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)}$ на $U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$) переходят в следующие векторные поля на U_g:

(a) $\widetilde{v}_{m(i)}(g)$ (при $\nu_e(g) < m(i) \le n(g)$) или $\widetilde{v}_{m(i)}(g) + \widetilde{v}_{m(i)+1}(g) + \dots + \widetilde{v}_{\nu_t(g)}$ (при $\nu_{t-1}(g) < m(i) \le \nu_t(g)$, $1 \le t \le e(g)$),

(b) $\widetilde{v}_{m(j)}(g)$ (при $1 \le j \le \nu_0(f)$) или $\eta_k(\widetilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + \widetilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2+\eta_k}(g) + \dots + \widetilde{v}_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g))$ (при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \le k \le e(f)$),

причем каждое поле $\widetilde{v}_m(g)$, $1 \le m \le n(g)$, входит в качестве слагаемого (с коэффициентом $\pm$) не более чем в одно из полей $(h^*_{f,\tau'})_*(\widetilde{v}_\ell(f))$, $1 \le \ell \le n(f)$.

Из описанного поведения векторных полей $\widetilde{v}_\ell$, $1 \le \ell \le n$, при погружении (3.32) следует, что это погружение является допустимым погружением утолщенных цилиндров (см. определение 2.3(D)).

3.3 Построение косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ для класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$

Шаг 9. Рассмотрим стандартную цилиндрическую ручку $D_{[f]_{\mathrm{isot}}} \times \mathbb{S}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(\mathbf{c}(f))} \times (U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*)$ и покомпонентное правое действие на ней дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \Gamma_f \cong \widetilde{\Gamma}_f / \left(((\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0)/(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0\right),$$

где
$$\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \widetilde{\Gamma}_f := (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)/(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0, \tag{3.33}$$

допустимыми автоморфизмами (см. (3.28) и лемму 3.2). Покажем, что это действие (а также действие группы $\widetilde{\Gamma}_f$ на U_f^∞) свободно. Докажем две леммы.

Лемма 3.3. *Если выполнено условие* (2.2)*, то для любого диффеоморфизма $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$ найдется ребро графа G_f* (см. обозначения 2.2(B) и 2.5)*, переходящее в себя при отображении h.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть W_f – граф Кронрода-Риба функции f (см. [41] или [16]), т.е. граф W_f получен из поверхности M стягиванием в точку каждой компоненты связности линии уровня функции f. Обозначим через $p_f\colon M \to W_f$ естественную проекцию. Вершину графа W_f назовем *сферической*, если прообраз достаточно малой ее окрестности при отображении p_f гомеоморфен сфере с проколами. Вершину графа W_f назовем *граничной* (соответственно *отмеченной*), если ее прообраз при отображении p_f является компонентой края M (соответственно содержит отмеченную критическую точку функции f). Подграф графа W_f назовем $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$*-неподвижным*, если при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f, индуцированном любым диффеоморфизмом $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$, любая вершина и любое ребро этого подграфа переходят в себя. Обозначим через W_f' минимальный связный подграф графа W_f, содержащий каждый простой цикл графа W_f, каждую граничную вершину, каждую отмеченную вершину и каждую несферическую вершину. Он непуст и содержит неграничную вершину в силу (2.2). Покажем, что подграф W_f' является $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижным. Пусть $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$. Так как h сохраняет неподвижными все отмеченные критические точки функции f и переводит в себя каждую компоненту края, то все отмеченные вершины и все граничные вершины $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижны. Ввиду $h \in \mathcal{T}$ индуцированный автоморфизм гомологий $\bar{h}^* \in H_1(\bar{M})$ (см. обозначение 2.2(B)) совпадает с тождественным, поэтому каждая несферическая вершина $v \in W_f$ является $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижной, а каждый простой цикл на графе W_f переходит в себя с сохранением ориентации при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Если пересечение двух простых циклов непусто и связно, то оно $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижно, поэтому такие циклы $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижны. Поэтому каждая компонента связности объединения простых циклов, не являющаяся простым циклом (или содержащая несферическую или отмеченную

вершину), $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижна. Пусть $W''_f \subset W_f$ — объединение всех простых циклов, множества несферических вершин и множества отмеченных вершин графа W_f, и пусть простой путь в графе W_f соединяет две компоненты связности графа W''_f и пересекается с W''_f только в концах. Такой путь единствен (для фиксированной пары компонент), а потому $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижен (в силу $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$-инвариантности подграфа W''_f). Отсюда следует $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-неподвижность подграфа W'_f.

Шаг 2. Пусть $M' \subset M$ — прообраз малой связной окрестности вершины $v \in W_f$ при отображении $p_f\colon M \to W_f$, обозначим $c := f(p_f^{-1}(v))$. Пусть $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$, $h(M') = M'$, и существует седловая критическая точка в M', не являющаяся неподвижной при h. Пусть замкнутая поверхность $\overline{M'}$ получена из M' стягиванием в точку каждой компоненты края M', и $\bar{h}\colon \overline{M'} \to \overline{M'}$ — индуцированный гомеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что ограничение h на каждую h-инвариантную компоненту связности $\overline{M'} \setminus f^{-1}(c)$, гомеоморфную $(S^1 \times (c; c+\varepsilon])/(S^1 \times \{c+\varepsilon\})$, является поворотом вокруг точки $S^1 \times \{c+\varepsilon\}$ (по отношению к естественным “полярным” координатам в $(S^1 \times (c; c+\varepsilon])/(S^1 \times \{c+\varepsilon\})$), тогда эта точка является единственной неподвижной точкой в данной компоненте. Так как $\bar{h}$ индуцирует тождественный автоморфизм гомологий $H_1(\overline{M'})$ (ввиду $h \in \mathcal{T}$), и все его неподвижные точки имеют индекс $+1$, то по формуле Лефшеца количество неподвижных точек равно $\chi(\overline{M'})$.

Шаг 3. Вершину графа W_f назовем *сильно* $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$*-инвариантной*, если ее степень в графе W_f больше 1 и при любом диффеоморфизме $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$ каждая вершина и каждое ребро графа $p_f^{-1}(v) \subset G_f$ переходят в себя. Докажем, что в W'_f существует сильно $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-инвариантная вершина. Если вершина $v \in W'_f$ не является сильно $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-инвариантной, то либо ее степень в W_f равна 1, либо найдется такой диффеоморфизм $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$, что количество неподвижных точек соответствующего индуцированного гомеоморфизма $\bar{h}\colon \overline{M'} \to \overline{M'}$ (см. шаг 2 выше) согласно формуле Лефшеца равно $\chi(\overline{M'})$ и не меньше суммы $k_v + \deg_{W'_f} v$ числа k_v отмеченных критических точек в $p_f^{-1}(v)$ и степени $\deg_{W'_f} v$ вершины v в графе W'_f (т.е. $\chi(\overline{M'}) \geq k_v + \deg_{W'_f} v \geq 0$), откуда вершина v является сферической и $k_v + \deg_{W'_f} v \leq 2$ (так как в противном случае $\chi(\overline{M'}) = k_v + \deg_{W'_f} v = 0$, откуда $W'_f = \{v\}$, M — тор и все критические точки неотмечены, что противоречит (2.2)). Если все вершины графа W'_f не являются сильно $\mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$-инвариантными, то по доказанному выше каждая вершина $v \in W'_f$ сферическая и либо имеет степень 1 в W_f, либо имеет степень $\deg_{W'_f} v \leq 2 - k_v \leq 2$ в W'_f, откуда граф W'_f является простой ломаной, все его внутренние вершины неотмечены (так как $k_v = 0$ в случае $\deg_{W'_f} v = 2$), а сумма значений k_v для концевых вершин $v \in \partial W'_f$, не являющихся граничными, не превосходит $2 - d^+ - d^- = \chi(M)$ (так как $k_v \leq 1$ при $\deg_{W'_f} v = 1$, и $k_v \leq 2$ при $\deg_{W'_f} v = 0$), откуда общее количество отмеченных критических точек $\leq \chi(M)$, что противоречит (2.2). Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть выполнено условие* (2.2). *Пусть функция Морса $f \in F^1$, класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty$, диффеоморфизм $h \in \mathrm{stab}_{\mathcal{T}} f$* (см. обозначение 2.2(B)) *и мультискручивание Дэна $h_1 \in \Theta_f$ удовлетворяют условию $h^*(u) = h_1^*(u)$. Тогда $hh_1^{-1} \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0$, см.* (3.28).

Доказательство. По лемме 3.3 найдется ребро графа G_f, переходящее в себя при отображении h. Пусть C_f — компонента связности графа G_f, содержащая это ребро, и пусть Z_ℓ — открытый цилиндр, одна из компонент границы которого (скажем, нижнее основание $\partial^- Z_\ell$) имеет общее ребро с графом C_f (см. (3.14)). Тогда любое ребро графа $C_f \cup \partial^- Z_\ell$ и цилиндр Z_ℓ тоже переходят в себя при отображении h. Так как пути $\widetilde{e}_\ell, h_1(\widetilde{e}_\ell) \subset \overline{Z_\ell}$ выходят из одной и той же точки (принадлежащей $\partial^- Z_\ell$), то 1-цепь $h(\widetilde{e}_\ell) - h_1(\widetilde{e}_\ell)$ гомологична некоторой линейной комбинации $\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i e_i$ ориентированных ребер основания $\partial^+ Z_\ell$ с целыми коэффициентами, причем все коэффициенты λ_i

либо неотрицательны, либо неположительны одновременно. Но

$$\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i u([e_i]) = u([h(\widetilde{e}_\ell)] - [h_1(\widetilde{e}_\ell)]) = (h^*(u) - h_1^*(u))([\widetilde{e}_\ell]) = 0$$

по предположению. Так как значение 1-коцикла $u \in U_f^\infty$ на каждом ориентированном ребре $e_1, \dots, e_{2q} \subset G_f$ положительно (см. (3.13)), то линейная комбинация тривиальна. Значит, $[h(\widetilde{e}_\ell)] = [h_1(\widetilde{e}_\ell)]$, откуда $hh_1^{-1}|_{\overline{Z_\ell}}$ гомотопно $\mathrm{id}_{\overline{Z_\ell}}$ в классе гомеоморфизмов, сохраняющих функцию $f|_{\overline{Z_\ell}}$ и переводящих вершины графа ∂Z_ℓ в себя. Эти рассуждения показывают (с использованием связности M), что $hh_1^{-1} \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)^0$. Лемма доказана. $\square$

В силу (3.28) и леммы 3.4 группа Γ_f действует свободно на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, поэтому она действует свободно на стандартной цилиндрической ручке $D_f \times \mathbb{S}_f$ допустимыми автоморфизмами (см. лемму 3.2), а потому конечна (см. определение 2.3(B)). Значит, пространство орбит

$$\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \mathbb{D}^{\mathrm{st}}_f := (D_f \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f \approx (\tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} \times U_f)/\widetilde{\Gamma}_f \tag{3.34}$$

является стандартной косой цилиндрической ручкой (см. (3.33) и определение 2.3(C)).

Шаг 10. Изучим взаимосвязь стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}, \mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\mathrm{isot}} \prec [g]_{\mathrm{isot}}$. Пусть $f \in F^1$ — отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))} = D_{[f]_{\mathrm{isot}}} = D_f$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $[g]_{\mathrm{isot}} = \delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}}$ (см. (3.3)). Рассмотрим погружение

$$h^{*0}_{f,\tau'}|_{\tau'} \times [h^*_{f,\tau'}|_{U_f}]\colon\ \tau' \times \mathbb{S}_f \looparrowright D_g \times \mathbb{S}_g, \tag{3.35}$$
$$\big(\boldsymbol{c}, (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)\big) \mapsto \big(h^{*0}_{f,\tau'}(\boldsymbol{c}), (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^* h^*_{f,\tau'}(u)\big),$$

являющееся прямым произведением изометрии (3.6) евклидовых многогранников и допустимого погружения (3.32) утолщенных цилиндров, т.е. допустимым погружением стандартных цилиндрических ручек (см. определение 2.3(D)). Рассмотрим орбиту грани $\tau' \subset \partial D_f$ при действии группы Γ_f (см. (3.33)) изометриями многогранника D_f, и следующие два объединения его граней:

$$\Gamma_f(\tau') := \bigcup_{h \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f} h^{*0}(\tau') \ \subseteq \bigcup_{\delta_{\tau_1'}[f]_{\mathrm{isot}} = [g]_{\mathrm{isot}}} \tau_1' \ =:\ \partial_{[g]_{\mathrm{isot}}} D_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \partial_g D_f, \tag{3.36}$$

см. (3.3). Включение в (3.36) следует из того, что $\delta_{h^{*0}(\tau')}[f]_{\mathrm{isot}} = [gh]_{\mathrm{isot}} = [g]_{\mathrm{isot}}$ ввиду включения $h \in \mathscr{D}^0$. Итак, (допустимые) погружения, отвечающие этим граням, имеют одну и ту же область значений – стандартную цилиндрическую ручку $D_g \times \mathbb{S}_g$. Любые две такие грани либо совпадают, либо не пересекаются в силу леммы 3.1. Рассмотрим погружение, составленное из (допустимых) погружений этих граней:

$$(\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f \looparrowright D_g \times \mathbb{S}_g, \quad \big(\boldsymbol{c}, (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)\big) \mapsto \Big(h^{*0}_{f,\tau_1'}(\boldsymbol{c}), (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^* h^*_{f,\tau_1'}(u)\Big),$$

$(\boldsymbol{c}, u) \in \tau_1' \times U_f$. Это отображение корректно определено (и является погружением), так как грани $\tau_1' \in (\delta[f]_{\mathrm{isot}})^{-1}([g]_{\mathrm{isot}})$ попарно не пересекаются (см. выше). Оно переводит любую Γ_f-орбиту в некоторую Γ_g-орбиту, так как ввиду (3.9) для любого $h \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f$ точки $(\boldsymbol{c}, u) \in \tau_1' \times U_f$ и $(h^{*0}(\boldsymbol{c}), h^*(u)) \in (h^{*0}(\tau_1')) \times U_f$ переходят в элементы $(h^{*0}_{f,\tau_1'}(\boldsymbol{c}), (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^* h^*_{f,\tau_1'}(u))$ и $(h^{*0}_{f,h^{*0}(\tau_1')} h^{*0}(\boldsymbol{c}), (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^* h^*_{f,h^{*0}(\tau_1')} h^*(u)) = (h_1^{*0} h^{*0}_{f,\tau_1'}(\boldsymbol{c}), (\mathscr{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_1^* h^*_{f,\tau_1'}(u))$ одной и той же Γ_g-орбиты, где $h_1 \in \mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} g$. Поэтому это погружение индуцирует корректно определенное погружение пространств орбит:

$$\chi_{[f]_{\mathrm{isot}},[g]_{\mathrm{isot}}} = \chi_{f,g}\colon\ \left((\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f\right)/\Gamma_f \looparrowright (D_g \times \mathbb{S}_g)/\Gamma_g,$$

$$\Gamma_f(\boldsymbol{c},(\mathscr{D}^0\cap\Theta_f)^*(u))\mapsto\Gamma_g(h^{*0}_{f,\tau'_1}(\boldsymbol{c}),(\mathscr{D}^0\cap\Theta_g)^*h^*_{f,\tau'_1}(u)),\qquad(\boldsymbol{c},u)\in\tau'_1\times U_f,$$

где $[g]_{\rm isot}=\delta_{\tau'_1}[f]_{\rm isot}$ (см. (3.3)). (Оно является погружением, так как группы Γ_f,Γ_g конечны и действуют свободно.) Рассмотрим его ограничение:

$$\chi_{[f]_{\rm isot},\tau'}=\chi_{f,\tau'}:=\chi_{f,g}|_{\left(\left(\Gamma_f(\tau')\right)\times\mathbb{S}_f\right)/\Gamma_f}\colon\ \left(\left(\Gamma_f(\tau')\right)\times\mathbb{S}_f\right)/\Gamma_f\overset{(*)}{\approx}\left(\tau'\times\mathbb{S}_f\right)/\Gamma_{f,\tau'}\approx$$

$$\approx\left(\tau'\times U_f\right)/\widetilde\Gamma_{f,\tau'}\looparrowright\mathbb{D}^{\rm st}_{[g]_{\rm isot}}=\mathbb{D}^{\rm st}_g=(D_g\times\mathbb{S}_g)/\Gamma_g\approx(D_g\times U_g)/\widetilde\Gamma_g,$$

$$\widetilde\Gamma_{f,\tau'}(\boldsymbol{c},u)\mapsto\widetilde\Gamma_g(h^{*0}_{f,\tau'}(\boldsymbol{c}),h^*_{f,\tau'}(u)),\quad(\boldsymbol{c},u)\in\tau'\times U_f,$$

$$\Gamma_{f,\tau'}:=\widetilde\Gamma_{f,\tau'}/\left(((\mathscr{D}^0\cap\Theta_f)(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f)^0)/(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f)^0\right),\quad\widetilde\Gamma_{f,\tau'}:=\mathrm{stab}_{\widetilde\Gamma_f}\tau',$$

где гомеоморфизм $(*)$ следует из того, что при $h\in\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f$ грани $\tau',h^{*0}(\tau')$ либо совпадают, либо не пересекаются (см. выше). Итак, областью определения погружения $\chi_{f,\tau'}$ является косая грань

$$\partial_{\tau'}\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}=\partial_{\tau'}\mathbb{D}^{\rm st}_f:=\left(\left(\Gamma_f(\tau')\right)\times\mathbb{S}_f\right)/\Gamma_f\tag{3.37}$$

стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}^{\rm st}_f=(D_f\times\mathbb{S}_f)/\Gamma_f$, т.е. образ грани $\tau'\times\mathbb{S}_f$ стандартной цилиндрической ручки $D_f\times\mathbb{S}_f$ при проекции $D_f\times\mathbb{S}_f\to\mathbb{D}^{\rm st}_f$. А областью определения погружения $\chi_{f,g}$ является объединение попарно непересекающихся косых граней ручки $\mathbb{D}^{\rm st}_f$:

$$\partial_{[g]_{\rm isot}}\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}=\partial_g\mathbb{D}^{\rm st}_f:=((\partial_gD_f)\times\mathbb{S}_f)/\Gamma_f.\tag{3.38}$$

Подчеркнем, что $\partial_{\tau'}\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}=\partial_{\tau'_1}\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}$, $\chi_{f,\tau'}=\chi_{f,\tau'_1}$ для любой грани $\tau'_1\in\Gamma_f(\tau')$.

Пусть $[f]_{\rm isot}\prec[g]_{\rm isot}\prec[g_1]_{\rm isot}$, причем $[g]_{\rm isot}=\delta_{\tau'}[f]_{\rm isot}$, $[g_1]_{\rm isot}=\delta_{\tau''}[f]_{\rm isot}$ для некоторых граней $\tau''\prec\tau'\prec\tau_{J(\boldsymbol{c})}$, и пусть f,g,g_1 — отмеченные функции своих классов изотопности. Из (3.8) и того, что группы $\mathrm{Diff}^0(M,\mathcal{C}_{g_1})$ и $\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g_1$ действуют тривиально на косой ручке $\mathbb{D}^{\rm st}_{g_1}$, получаем

$$\chi_{g,g_1}\circ\chi_{f,g}|_{\partial_{\tau''}\mathbb{D}^{\rm st}_f}=\chi_{g,h^{*0}_{f,\tau'}(\tau'')}\circ\chi_{f,\tau'}|_{\partial_{\tau''}\mathbb{D}^{\rm st}_f}=\chi_{f,\tau''}=\chi_{f,g_1}|_{\partial_{\tau''}\mathbb{D}^{\rm st}_f}.\tag{3.39}$$

Покажем, что погружение $\chi_{f,g}$ является вложением (а потому $\chi_{f,\tau'}$ является мономорфизмом стандартных косых цилиндрических ручек, см. определение 2.3(D), ввиду допустимости погружения (3.35)). Предположим, что $u_1,u_2\in U^\infty_f$ и $h^*_{f,\tau'}(u_1)=h^*h^*_{f,\tau'_1}(u_2)$ для некоторых $h\in\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g$ и $\tau'_1\prec D_f$, таких что $\delta_{\tau'_1}[f]_{\rm isot}=\delta_{\tau'}[f]_{\rm isot}=[g]_{\rm isot}$. Покажем, что $u_1\in\widetilde\Gamma^*_f(u_2)$, где $\widetilde\Gamma^*_f\subset\mathrm{Aut}(H^1_f)$ — группа автоморфизмов относительных когомологий, индуцированная группой классов отображений $\widetilde\Gamma_f=(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f)/(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f)^0$. Имеем

$$\begin{aligned}u_1&=(h^*_{f,\tau'})^{-1}h^*h^*_{f,\tau'_1}(u_2)=(h_{f,\tau'_1}hh^{-1}_{f,\tau'})^*(u_2)\\&=(h_{0;f,\widetilde f_1}h_{1;\widetilde f_1,g}hh^{-1}_{1;\widetilde f,g}h^{-1}_{0;f,\widetilde f})^*(u_2)=(h_{0;f,\widetilde f_1}h_{1;\widetilde f_1,\widetilde f}h^{-1}_{0;f,\widetilde f})^*(u_2)=h^*_1(u_2),\end{aligned}\tag{3.40}$$

где "возмущенным" функциям $\widetilde f,\widetilde f_1$ отвечают грани τ',τ'_1 по правилу (3.3), $h_{1;\widetilde f_1,\widetilde f}:=h_{1;\widetilde f_1,g}hh^{-1}_{1;\widetilde f,g}$, $h_1:=h_{0;f,\widetilde f_1}h_{1;\widetilde f_1,\widetilde f}h^{-1}_{0;f,\widetilde f}$. Так как диффеоморфизм $h_{1;\widetilde f_1,\widetilde f}\in\mathscr{D}^0$ переводит линии уровня функции $\widetilde f$ в линии уровня функции $\widetilde f_1$ с сохранением направления роста (в силу $h\in\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g$), то $\widetilde f=h_2\widetilde f_1h_{1;\widetilde f_1,\widetilde f}$ для некоторого $h_2\in\mathrm{Diff}^+[-1;1]$, откуда $\widetilde f=h_2\widetilde f_1(h^{-1}_{0;f,\widetilde f_1}h_1h_{0;f,\widetilde f})$, т.е. диффеоморфизм $h_1\in\mathscr{D}^0$ переводит линии уровня функции $\widetilde f^*:=\widetilde fh^{-1}_{0;f,\widetilde f}$ в линии уровня функции $\widetilde f^*_1:=\widetilde f_1h^{-1}_{0;f,\widetilde f_1}$ с сохранением направления роста. Отсюда и из того, что обе "возмущенные" функции $\widetilde f^*,\widetilde f^*_1$ близки к f и имеют те

же критические точки, что и "невозмущенная" функция f, следует, что $h_1 \in \mathrm{Diff}(M, \mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2})$. Осталось доказать, что $h_1 \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)(\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$. Так как $\widetilde{f}^* = h_2 \widetilde{f}_1^* h_1$, то

$$h_1(G_{\widetilde{f}^*}) = G_{\widetilde{f}_1^*},\ J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1^* h_1)) = J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}^*)) =: \widehat{J}, \quad \Rightarrow\ J(\boldsymbol{c}(f h_1)) = J(\boldsymbol{c}(f)) =: J \tag{3.41}$$

(так как из того, что перестановка $h_1|_{\mathcal{C}_{f,1}} \colon \mathcal{C}_{f,1} \to \mathcal{C}_{f,1}$ седловых точек переводит отношение частичного порядка $J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями одной "возмущенной" 0-коцепи $\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1^*) = \widetilde{f}_1^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$ в отношение частичного порядка $J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями другой "возмущенной" 0-коцепи $\boldsymbol{c}(\widetilde{f}^*) = \widetilde{f}^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$, следует сохранение этой перестановкой "более слабого" отношения частичного порядка на $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями "невозмущенной" 0-коцепи $\boldsymbol{c}(f) = f|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$). Так как функции f, fh_1 имеют одни и те же множества $\mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2}$ критических точек минимумов, седловых точек и точек максимумов, то, согласно (3.41) и достаточному условию изотопности функций Морса (см. [31, лемма 1]), достаточно показать совпадение графов $G_{fh_1} = h_0(G_f)$ для некоторого диффеоморфизма $h_0 \in \mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$, см. обозначение 2.5 и (3.8) (т.е. что графы G_f и G_{fh_1} изотопны в поверхности $M' := M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ относительно множества вершин $\mathcal{C}_{f,1}$). Обозначим $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$.

Лемма 3.5. *Пусть $f \in F^1$, $u \in U_f^\infty \subset H_f^1$, и пусть в обозначениях* (3.3) *возмущенной функции $\widetilde{f}^* := \widetilde{f} h^{-1}_{0;f,\widetilde{f}}$ отвечает грань $\tau' := \tau_{J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}^*))} \prec \tau_{J(\boldsymbol{c}(f))}$. Тогда граф $G_f \subset M$* (см. обозначение 2.5) *совпадает с точностью до диффеоморфизмов из $\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ с некоторым графом $G := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}^*}, u, \widehat{J}, J} \subset M$, рассматриваемым с точностью до диффеоморфизмов из $\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G))$ и определяемым следующим набором данных: (i) поверхность M; (ii) подмножество $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \subset M$; (iii) граф $G_{\widetilde{f}^*} \subset M' := M \setminus \mathcal{C}_{f,0,2}$, рассматриваемый с точностью до диффеоморфизмов из $\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G_{\widetilde{f}^*}))$; (iv) класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty \subset H_f^1 = H^1(M', V(G_{\widetilde{f}^*}); \mathbb{R})$; (v) два отношения частичного порядка $\widehat{J} := J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}^*)) \prec J := J(\boldsymbol{c}(f))$ на множестве $V(G_{\widetilde{f}^*})$ вершин графа $G_{\widetilde{f}^*}$ значениями функций $f, \widetilde{f}^*$ на вершинах (соответственно), где через $V(G) \subset G$ обозначено множество вершин графа G. То есть, если набор данных (i)–(v) построен указанным способом по паре "невозмущенной" и "возмущенной" функций $f, \widetilde{f}^*$, имеющих одно и то же множество критических точек, то $G_f \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$ для $G := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}^*}, u, \widehat{J}, J}$ (т.е. графы G_f и G изотопны в поверхности M' относительно множества вершин $V(G_{\widetilde{f}^*}) = V(G)$).*

Доказательство. Сначала проведем доказательство в случае, когда $\tau' := \tau_{\widehat{J}}$ является гипергранью грани $\tau := \tau_J$. Обозначим "возмущенную" функцию через $\widetilde{f}_1 := \widetilde{f}^*$. Граф $G = G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}_1}, u, \widehat{J}, J} \subset M$ строится так. Так как $\tau' := \tau_{\widehat{J}} \prec \tau := \tau_J$ – гипергрань, то ровно одно из седловых критических значений $c \in f(\mathcal{C}_{f,1})$ "невозмущенной" функции f распадается на два седловых критических значения $c^- < c^+$ "возмущенной" функции $\widetilde{f}_1$. Пусть $Z_\ell \subset M \setminus G_{\widetilde{f}_1}$ – такая компонента связности множества $M \setminus G_{\widetilde{f}_1}$, что $\inf \widetilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^-$ и $\sup \widetilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^+$ (т.е. Z_ℓ является открытым цилиндром для функции $\widetilde{f}_1$, см. (3.14)). Ориентированный граф $G \subset \overline{Z_\ell}$ назовем *Z_ℓ-допустимым*, если его множество вершин содержится в множестве вершин графа $G_{\widetilde{f}_1}$, а внутренность каждого его ребра содержится в Z_ℓ; Z_ℓ-допустимый однореберный ориентированный граф γ_0 с параметризацией $\gamma_0 \colon [0;1] \to \overline{Z_\ell}$ назовем *(Z_ℓ, u)-минимальным*, если

$$u([\gamma_0]) = \min \left\{ u([\gamma]) \ \middle|\ \gamma \in Z_\ell^{\mathrm{adm}},\ \gamma|_{[0;1/2]} = \gamma_0|_{[0;1/2]},\ u([\gamma]) > 0 \right\},$$

где через Z_ℓ^{adm} обозначено множество Z_ℓ-допустимых однореберных графов. Из включений $u \in U_f^\infty \subset U_{\widetilde{f}_1}^\infty$ и определения подмножества $U_{\widetilde{f}_1}^\infty \subset H_f^1$ следует, что указанный минимум достигается

для любого Z_ℓ-допустимого однореберного графа γ_0, причем ровно на одном Z_ℓ-допустимом однореберном графе с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ-допустимых графов. Более того, имеется Z_ℓ-допустимый ориентированный граф $G_\ell \subset \overline{Z_\ell}$, каждое ребро которого является (Z_ℓ, u)-минимальным и который содержит в качестве ровно одного из своих ребер любой (Z_ℓ, u)-минимальный однореберный граф с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ-допустимых графов. Причем граф G_ℓ с указанным свойством единствен с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ-допустимых графов. Обозначим через $G \subset M$ граф, полученный из графа $G_{\widetilde{f}_1}$ заменой подграфа ∂Z_ℓ соответствующим графом G_ℓ для каждой компоненты связности $Z_\ell \subset M \setminus G_{\widetilde{f}_1}$, такой что $Z_\ell \subset \widetilde{f}_1^{-1}([c^-; c^+])$. Нетрудно показывается, что $G_f \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$.

В общем случае имеются такие последовательности граней $\tau', \tau'', \dots, \tau^{(j-1)}$ грани $\tau =: \tau^{(j)}$ и соответствующих отношений частичного порядка $\widehat{J} =: J', J'', \dots, J^{(j-1)}, J^{(j)} := J$, что $\tau^{(i-1)} = \tau_{J^{(i-1)}}$ является гипергранью грани $\tau^{(i)} = \tau_{J^{(i)}}$, $2 \le i \le j$. Пусть $\widetilde{f}_j := f$ – невозмущенная функция, и $\widetilde{f}_i$ – возмущенная функция, которой отвечает грань $\tau^{(i)}$ по правилу (3.3), причем $\mathcal{C}_{\widetilde{f}_i} = \mathcal{C}_f$, $1 \le i \le j-1$. Определим индуктивно по графу $G' := G_{\widetilde{f}_1} = G_{\widetilde{f}^*} \subset M$ графы $G^{(i+1)} := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G^{(i)}, u, J^{(i)}, J^{(i+1)}}$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. Положим $G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}_1}, u, \widehat{J}, J} := G^{(j)}$. Из доказанного выше следует (по индукции), что $G_{\widetilde{f}_{i+1}} \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(i+1)})$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. В частности, $G_f = G_{\widetilde{f}_j} \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(j)})$. Лемма 3.5 доказана. $\square$

Из леммы 3.5 следует ввиду (3.40) и (3.41), что

$$G_f \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}^*}, u_1, \widehat{J}, J}),$$

$$G_f \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}_1^*}, u_2, J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1^*)), J}),$$

$$G_{fh_1} \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{fh_1}))(G_{M, h_1^{-1}(\mathcal{C}_{f,0,2}), h_1^{-1}(G_{\widetilde{f}_1^*}), h_1^*(u_2), J(\boldsymbol{c}(\widetilde{f}_1^* h_1)), J(\boldsymbol{c}(fh_1))})$$
$$= (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\widetilde{f}^*}, u_1, \widehat{J}, J}) = (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f),$$

т.е. следует требуемое включение $G_{fh_1} \in (\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f)$. Таким образом, $h_1 \in (\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0} f)(\mathrm{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$, откуда $u_1 \in \widetilde{\Gamma}_f^*(u_2)$, а значит, отображение $\chi_{f,g}$ является вложением.

4 Построение комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса

В данном параграфе строится косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ (см. определение 2.4(B)), удовлетворяющий условиям теоремы 2.6. Мы получим комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ из стандартных косых цилиндрических ручек, описанных в §3, путем приклеивания друг к другу по построенным там отображениям инцидентности. Конструкция, приведенная в данном параграфе, является обобщением конструкции из [8, §5], где были построены (при дополнительном ограничении $p = p^*$, $q = q^*$, $r = r^*$, т.е. когда все критические точки фиксированы) более простые комплексы $\widetilde{K}$ и K (комплексы функций Морса), являющиеся строго полиэдральными комплексами (см. определение 2.4,(C)).

Пусть $f_* \in F^1$ – базисная функция Морса (см. определение 2.1(A)). В каждом классе изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ рассмотрим отмеченную функцию $f \in [f]_{\mathrm{isot}}$ этого класса с множествами критических точек $\mathcal{C}_{f,\lambda} = \mathcal{C}_{f_*,\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$ (см. §3, шаг 2), тогда $H_f^0 = H_{f_*}^0$, $H_f^1 = H_{f_*}^1$. Рассмотрим топологическое пространство

$$(F^1/\sim_{\mathrm{isot}})^{\mathrm{discr}} \times \mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \times H_{f_*}^1 \approx (F^1/\sim_{\mathrm{isot}})^{\mathrm{discr}} \times \mathcal{P}^{q-1} \times \mathbb{R}^{2q},$$

где $(F^1/\sim_{\mathrm{isot}})^{\mathrm{discr}} := F^1/\sim_{\mathrm{isot}}$ с дискретной топологией, а евклидов многогранник $\mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \approx \mathcal{P}^{q-1}$ и векторное пространство $H_{f_*}^1 \approx \mathbb{R}^{2q}$ определены как в §3, шаги 1, 4 и (3.10). Рассмотрим в этом

топологическом пространстве подпространство

$$\widetilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{[f]_{\mathrm{isot}}\in F^1/\sim_{\mathrm{isot}}} \{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times D_{[f]_{\mathrm{isot}}} \times U_{[f]_{\mathrm{isot}}} \tag{4.1}$$

с индуцированной топологией (см. §3, шаг 2 и (3.12)).

Определение 4.1 (комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса)**.** Рассмотрим факторпространство $\widetilde{\mathbb{K}} := (\widetilde{\mathbb{X}}/\sim)/\sim_{\mathrm{glue}}$ с фактортопологией, где отношения эквивалентности $\sim$, $\sim_{\mathrm{glue}}$ на пространствах $\widetilde{\mathbb{X}}$, $\widetilde{\mathbb{Y}} := \widetilde{\mathbb{X}}/\sim$ порождены следующими отношениями соответственно:

(отношение $\sim$ на $\widetilde{\mathbb{X}}$; стандартная косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$) для каждого класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ рассмотрим проекцию $D_{[f]_{\mathrm{isot}}}\times U_{[f]_{\mathrm{isot}}} \to (D_{[f]_{\mathrm{isot}}}\times U_{[f]_{\mathrm{isot}}})/\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = \mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ на стандартную косую цилиндрическую ручку $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ индекса $k = \dim D_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ (см. §3, шаг 9), рассмотрим проекцию $\{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times D_{[f]_{\mathrm{isot}}} \times U_{[f]_{\mathrm{isot}}} \to \{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times \mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} =: \boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, являющуюся прямым произведением отображения $\{[f]_{\mathrm{isot}}\} \to \{[f]_{\mathrm{isot}}\}$ и этой проекции, и назовем точки множества $\{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times D_{[f]_{\mathrm{isot}}} \times U_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ $\sim$*-эквивалентными*, если их образы в $\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ при последней проекции совпадают; тогда $\widetilde{\mathbb{Y}} := \widetilde{\mathbb{X}}/\sim = \bigcup_{[f]_{\mathrm{isot}}} \boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$;

(отношение $\sim_{\mathrm{glue}}$ на $\widetilde{\mathbb{Y}}$; отображения инцидентности) для каждой пары примыкающих классов $[f]_{\mathrm{isot}} \prec [g]_{\mathrm{isot}}$ рассмотрим вложение, называемое *отображением инцидентности*: $\chi_{[f]_{\mathrm{isot}},[g]_{\mathrm{isot}}}\colon \partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \hookrightarrow \mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$ (см. §3, шаги 3 и 10), где $\partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ содержится в подошве $\partial\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ и является объединением ее попарно непересекающихся косых граней $\partial_{\tau'}\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \subset \partial\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, см. (3.37), (3.38); рассмотрим индуцированное вложение $\partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := \{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times (\partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}) \hookrightarrow \boldsymbol{\upsilon}_{[g]_{\mathrm{isot}}}$ (которое тоже обозначим через $\chi_{[f]_{\mathrm{isot}},[g]_{\mathrm{isot}}}$); назовем любую точку множества $\partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}$ и ее образ в $\boldsymbol{\upsilon}_{[g]_{\mathrm{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}$ при данном вложении $\sim_{\mathrm{glue}}$*-эквивалентными*.

Пусть $p_Y\colon \widetilde{\mathbb{Y}} \to \widetilde{\mathbb{K}}$ – каноническая проекция. Рассмотрим подмножество $\mathring{\widetilde{\mathbb{Y}}} := \bigcup_{[f]_{\mathrm{isot}}} \mathring{\boldsymbol{\upsilon}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}$, где $\mathring{\boldsymbol{\upsilon}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := \{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times \mathring{\mathbb{D}}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ (см. определение 2.3,(C)). Обозначим $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := p_Y(\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}})$, $\mathring{\mathbb{D}}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := p_Y(\mathring{\boldsymbol{\upsilon}}_{[f]_{\mathrm{isot}}})$, $\partial\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := p_Y(\partial\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}})$, $\partial_{\tau'}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}} := \{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times (\partial_{\tau'}\mathbb{D}^{\mathrm{st}}_{[f]_{\mathrm{isot}}})$, и через $\mathring{\partial}_{[g]_{\mathrm{isot}}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ обозначим объединение открытых (косых) граней $\{[f]_{\mathrm{isot}}\} \times \left(((\mathring{\tau}') \times \mathbb{S}_{[f]_{\mathrm{isot}}})/\Gamma_{[f]_{\mathrm{isot}}}\right)$ стандартной (косой) цилиндрической ручки $\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, таких что $\tau' \prec D_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ и $\delta_{\tau'}[f]_{\mathrm{isot}} = [g]_{\mathrm{isot}}$.

Теорема 4.2. *Пространство $\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{Y}}/\sim_{\mathrm{glue}}$ обладает структурой косого цилиндрически-полиэдрального комплекса ранга $q-1$ с косыми цилиндрическими ручками $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} = p_Y(\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}) \subset \widetilde{\mathbb{K}}$, $[f]_{\mathrm{isot}} \in F^1/\sim_{\mathrm{isot}}$. При этом для любого класса изотопности $[f]_{\mathrm{isot}}$ отображение $\varphi_{[f]_{\mathrm{isot}}} := p_Y|_{\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}}\colon \boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \to \widetilde{\mathbb{K}}$ является характеристическим отображением ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$ (откуда отображение $p_Y|_{\mathring{\widetilde{\mathbb{Y}}}}\colon \mathring{\widetilde{\mathbb{Y}}} \to \widetilde{\mathbb{K}}$ биективно), и выполнено*

$$\partial\mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \subset \bigcup_{[g]_{\mathrm{isot}}\succ[f]_{\mathrm{isot}}} \mathbb{D}_{[g]_{\mathrm{isot}}}, \quad \mathbb{D}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \cap \mathring{\mathbb{D}}_{[g]_{\mathrm{isot}}} = \varphi_{[f]_{\mathrm{isot}}}(\mathring{\partial}_{[g]_{\mathrm{isot}}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}), \tag{4.2}$$

$$\varphi_{[g]_{\mathrm{isot}}} \circ \chi_{[f]_{\mathrm{isot}},[g]_{\mathrm{isot}}} = \varphi_{[f]_{\mathrm{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\mathrm{isot}}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\mathrm{isot}}}} \qquad \textit{для любых} \quad [f]_{\mathrm{isot}} \prec [g]_{\mathrm{isot}}. \tag{4.3}$$

Дискретная группа $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ действует на $\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса.

Доказательство. Шаг 1. При любом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подмножества

$$\widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\rm isot}} \le k} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}} = \widetilde{\mathbb{X}}/\sim, \quad \overset{\circ}{\widetilde{\mathbb{Y}}}{}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\rm isot}} \le k} \overset{\circ}{\boldsymbol{v}}_{[f]_{\rm isot}} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$$

с индуцированной топологией, и множество $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)} := \widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)}/\sim_{\rm glue}$ с фактортопологией. Докажем лемму (индукцией по k) для пространств $\widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$, $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$, $\overset{\circ}{\widetilde{\mathbb{Y}}}{}^{(k)} \subset \widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$ и проекции $p_{Y,k} := p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)}} \colon \widetilde{\mathbb{Y}}^{(k)} \to \widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$. При $k < 0$ доказывать нечего, так как $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)} = \varnothing$.

Пусть $k \ge 1$, и доказываемое утверждение верно для $\widetilde{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Покажем, что для каждого $[f]_{\rm isot}$, такого что $\operatorname{ind} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}} = k$, имеется (“приклеивающее”) отображение $\varphi'_{[f]_{\rm isot}} \colon \partial \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}} \to \widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ подошвы $\partial \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$ косой цилиндрической ручки $\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$, такое что $\varphi'_{[f]_{\rm isot}}|_{\partial_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}$ для любого $[g]_{\rm isot} \succ [f]_{\rm isot}$ (а потому $\operatorname{ind} \boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}} < k$), см. (3.38) и (3.37). Действительно, это отображение однозначно, так как для любых $[g_1]_{\rm isot} \succ [g]_{\rm isot} \succ [f]_{\rm isot}$ и $\tau'' \prec D_{[f]_{\rm isot}}$, таких что $\delta_{\tau''}[f]_{\rm isot} = [g_1]_{\rm isot}$, выполнено $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g_1]_{\rm isot}}|_{\partial_{\tau''} \boldsymbol{v}_f} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[g]_{\rm isot},[g_1]_{\rm isot}} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}|_{\partial_{\tau''} \boldsymbol{v}_f} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}|_{\partial_{\tau''} \boldsymbol{v}_f}$ ввиду (3.39) и (4.3) для $\widetilde{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Отображение $\varphi'_{[f]_{\rm isot}}$ непрерывно, так как его область определения является конечным (ввиду (3.3)) объединением замкнутых подмножеств $\partial_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$, таких что $[g]_{\rm isot} \succ [f]_{\rm isot}$, и его ограничение на такое подмножество есть композиция $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}$ непрерывных отображений. Отображение $\varphi'_{[f]_{\rm isot}}$ инъективно, так как его ограничение $\varphi'_{[f]_{\rm isot}}|_{\overset{\circ}{\partial}_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}|_{\overset{\circ}{\partial}_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}}$ на объединение открытых граней, отвечающих классу $[g]_{\rm isot} \succ [f]_{\rm isot}$, является композицией вложений $\chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}|_{\overset{\circ}{\partial}_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}}$ и $p_{Y,k-1}|_{\overset{\circ}{\boldsymbol{v}}_{[g]_{\rm isot}}}$ (ввиду §3, шаг 10, и биективности $p_{Y,k-1}|_{\overset{\circ}{\widetilde{\mathbb{Y}}}{}^{(k-1)}}$), а образы таких ограничений содержатся в открытых ручках $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}(\overset{\circ}{\partial}_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}) \subset p_{Y,k-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{v}}_{[g]_{\rm isot}})$, которые попарно не пересекаются (для разных классов $[g]_{\rm isot}$) ввиду биективности $p_{Y,k-1}|_{\overset{\circ}{\widetilde{\mathbb{Y}}}{}^{(k-1)}}$.

Отображение топологических пространств назовем *хорошим*, если оно переводит любое замкнутое подмножество в замкнутое подмножество. Отображение $\varphi'_{[f]_{\rm isot}}$ является хорошим, так как его ограничение на каждую косую грань $\partial_{\tau'} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}} \subset \partial_{[g]_{\rm isot}} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$ (для $\tau' \prec D_{[f]_{\rm isot}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\rm isot} = [g]_{\rm isot}$) есть композиция $p_{Y,k-1}|_{\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}}} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},\tau'}$ (автоматически хорошего, см. определение 2.3) мономорфизма $\chi_{[f]_{\rm isot},\tau'}$ косых цилиндрических ручек (см. §3, шаг 10) и (автоматически хорошего) характеристического отображения $p_{Y,k-1}|_{\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}}}$ косой ручки $p_{Y,k-1}(\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}}) \subset \widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ (по предположению индукции), а каждая косая грань замкнута и их конечное число. Отсюда следует, что $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ гомеоморфно пространству (с фактортопологией), полученному из $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ приклеиванием косых цилиндрических ручек $\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$ индекса k при помощи инъективных непрерывных хороших отображений $\varphi'_{[f]_{\rm isot}} \colon \partial \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}} \to \widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ их подошв, а потому $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ удовлетворяет условию (w) из определения 2.4(B). Поэтому $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ обладает свойствами (4.2) и (4.3), отображение $p_{Y,k}|_{\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}}$ является инъективным, непрерывным и хорошим, а потому задает структуру косой цилиндрической ручки на $p_{Y,k}(\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}})$ и является характеристическим отображением этой ручки. Пространство $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ с полученным разбиением на косые цилиндрические ручки $p_{Y,k}(\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}})$ удовлетворяет условию (c) из определения 2.4(B), так как ограничение характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}}$ любой ручки $\boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$ индекса k на каждую свою косую грань $\partial_{\tau'} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}$ есть композиция $p_{Y,k}|_{\partial_{\tau'} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}} = i_{k-1} \circ \varphi'_{[f]_{\rm isot}}|_{\partial_{\tau'} \boldsymbol{v}_{[f]_{\rm isot}}} = i_{k-1} \circ p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},\tau'} = p_{Y,k}|_{\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}}} \circ \chi_{[f]_{\rm isot},\tau'}$ мономорфизма $\chi_{[f]_{\rm isot},\tau'}$ стандартных косых цилиндрических ручек и характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}}}$ косой цилиндрической ручки $p_{Y,k}(\boldsymbol{v}_{[g]_{\rm isot}})$, где $i_{k-1} \colon \widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ – отображение включения. Значит, $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом ранга k, что завершает доказательство индукционного перехода.

Шаг 2. Определим (естественное) правое действие $\rho_Y\colon\ \mathscr{D}/\mathscr{D}^0\times\widetilde{\mathbb{Y}}\to\widetilde{\mathbb{Y}}$ дискретной группы $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ на пространстве $\widetilde{\mathbb{Y}}$ формулой

$$(h\mathscr{D}^0,[f]_{\rm isot},\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\rm isot}}(\boldsymbol{c},u))\mapsto([fh]_{\rm isot},\widetilde{\Gamma}_{[fh]_{\rm isot}}(h^{*0}_{1;[f]_{\rm isot},[fh]_{\rm isot}}(\boldsymbol{c}),h^{*}_{1;[f]_{\rm isot},[fh]_{\rm isot}}(u)))$$

при любых $h\in\mathscr{D}$, $([f]_{\rm isot},\boldsymbol{c},u)\in\widetilde{\widetilde{\mathbb{X}}}$ (см. §3, конец шага 9), где $h_{1;[f]_{\rm isot},[fh]_{\rm isot}}\in h\mathscr{D}^0\subset\mathscr{D}$ – диффеоморфизм, переводящий линии уровня отмеченной функции класса изотопности $[fh]_{\rm isot}$ в линии уровня отмеченной функции класса изотопности $[f]_{\rm isot}$ с сохранением направления роста. Это действие определено корректно, так как в силу [31, лемма 1] для любых $h_1,h_2\in\mathscr{D}$ выполнено

$$h^{-1}_{1;[f]_{\rm isot},[fh_1h_2]_{\rm isot}}h_{1;[f]_{\rm isot},[fh_1]_{\rm isot}}h_{1;[fh_1]_{\rm isot},[fh_1h_2]_{\rm isot}}\in(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g)(\mathrm{Diff}^0(M,\mathcal{C}_g))$$

и действие групп $\mathrm{stab}_g\mathscr{D}^0$ и $\mathrm{Diff}^0(M,\mathcal{C}_g)$ на косой цилиндрической ручке $\mathbb{D}^{\rm st}_{[g]_{\rm isot}}$ тривиально (см. (3.34), (3.33)), где g – отмеченная функция класса изотопности $[fh_1h_2]_{\rm isot}$. Для любых $[f]_{\rm isot}\prec[g]_{\rm isot}$ (а потому $[fh]_{\rm isot}\prec[gh]_{\rm isot}$ для любого $h\in\mathscr{D}$) определим отображение инцидентности

$$\chi_{[f],[g]}\colon\ \bigcup_{h\in\mathscr{D}}(\partial_{[gh]_{\rm isot}}\boldsymbol{\upsilon}_{[fh]_{\rm isot}})\to\bigcup_{h\in\mathscr{D}}\boldsymbol{\upsilon}_{[gh]_{\rm isot}}$$

правилом $\chi_{[f],[g]}|_{\partial_{[gh]_{\rm isot}}\boldsymbol{\upsilon}_{[fh]_{\rm isot}}}:=\chi_{[fh]_{\rm isot},[gh]_{\rm isot}}\colon\ \partial_{[gh]_{\rm isot}}\boldsymbol{\upsilon}_{[fh]_{\rm isot}}\to\boldsymbol{\upsilon}_{[gh]_{\rm isot}}$ для любого $h\in\mathscr{D}$. Отображение $\chi_{[f],[g]}$ определено корректно, так как для любых $[f]_{\rm isot}$ и $h_1\in\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}f$ подмножества $\partial_{[g]_{\rm isot}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\rm isot}}$, $\partial_{[gh_1]_{\rm isot}}\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\rm isot}}\subset\partial\boldsymbol{\upsilon}_{[f]_{\rm isot}}$ либо совпадают (откуда $[g]_{\rm isot}=[gh_1]_{\rm isot}$), либо не пересекаются ввиду леммы 3.1 (см. §3, шаг 10). Отображение $\chi_{[f],[g]}$ является $(\mathscr{D}/\mathscr{D}^0)$-эквивариантным (т.е. $\chi_{[f],[g]}\circ\rho_Y(h,\cdot)=\rho_Y(h,\chi_{[f],[g]}(\cdot))$ для любого $h\in\mathscr{D}$), так как ввиду (3.5) выполнено $h^{-1}h^{-1}_{[f]_{\rm isot},\tau'}hh_{[fh]_{\rm isot},h^*_{1;[f]_{\rm isot},[fh]_{\rm isot}}(\tau')}\in(\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g_1)(\mathrm{Diff}^0(M,\mathcal{C}_{g_1}))$ и действия групп $\mathrm{stab}_{\mathscr{D}^0}g_1$ и $\mathrm{Diff}^0(M,\mathcal{C}_{g_1})$ на стандартной косой цилиндрической ручке $\mathbb{D}^{\rm st}_{[g_1]_{\rm isot}}$ тривиальны, где $\tau'\prec D_{[f]_{\rm isot}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\rm isot}=[g]_{\rm isot}$, g_1 – отмеченная функция класса изотопности $[gh]_{\rm isot}$, $h\in\mathscr{D}$. Поэтому правое действие ρ_Y индуцирует правое действие $\rho^*\colon\ \mathscr{D}/\mathscr{D}^0\times\widetilde{\mathbb{K}}\to\widetilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, такое что $\rho^*(h\mathscr{D}^0,p_Y(y)):=p_Y\circ\rho_Y(h\mathscr{D}^0,y)$ для любых $h\in\mathscr{D}$, $y\in\widetilde{\mathbb{Y}}$.

В частности, действие $\rho^*(h\mathscr{D}^0,\cdot)$ любого элемента $h\mathscr{D}^0\in\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ на комплексе $\widetilde{\mathbb{K}}$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{D}_{[f]_{\rm isot}}\to\mathbb{D}_{[fh]_{\rm isot}}$ косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\rm isot}},\mathbb{D}_{[fh]_{\rm isot}}\subset\widetilde{\mathbb{K}}$ для любой функции $f\in F$. Поэтому эти ручки изоморфны одной и той же стандартной ручке $(D_{f_0}\times\mathbb{S}_{f_0})/\Gamma_{f_0}$, где f_0 – отмеченная функция класса эквивалентности $[f]=[fh]$. Теорема 4.2 полностью доказана. $\square$

Аналогично определению 4.1 определим гладкое многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$. А именно, рассмотрим в евклидовом пространстве $H^0_f=\mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}}\cong\mathbb{R}^q$ открытый куб $(-1;1)^{\mathcal{C}_{f,1}}\cong(-1;1)^q$, и для любой грани $\tau=\tau_J\subset\mathcal{P}^{q-1}_f$ рассмотрим ее внутренность $\mathring{\tau}$ и обозначим через $(\mathring{\tau})^*$ множество таких 0-коцепей $\boldsymbol{c}'\in(-1;1)^{\mathcal{C}_{f,1}}\subset H^0_f\cong\mathbb{R}^q$, что $J(\boldsymbol{c}')=J$ (см. §3, шаг 1), а через τ^* обозначим множество таких 0-коцепей $\boldsymbol{c}'\in(-1;1)^{\mathcal{C}_{f,1}}\cong(-1;1)^q$, что $J(\boldsymbol{c}')\preceq J$. Назовем $(\mathring{\tau})^*$ *стратом*, а τ^* – *звездой* этого страта (отвечающими грани τ). Тогда звезда τ^* открыта в H^0_f,

$$(\mathring{\tau})^*\subseteq\tau^*,\qquad\tau\subset\tau^*,\tag{4.4}$$

страт $(\mathring{\tau})^*$ есть выпуклое открытое подмножество некоторого $|f(\mathcal{C}_{f,1})|$-мерного линейного подпространства в H^0_f, грань τ есть выпуклый $(q-|f(\mathcal{C}_{f,1})|)$-мерный многогранник, причем грань τ и страт $(\mathring{\tau})^*$ пересекаются трансверсально в барицентре грани τ, являющемся внутренней точкой каждого из них. Положим $D^*_{[f]_{\rm isot}}:=\tau^*_{J(\boldsymbol{c}(f))}$, $(\mathring{D}_{[f]_{\rm isot}})^*:=(\mathring{\tau}_{J(\boldsymbol{c}(f))})^*$. Рассмотрим в пространстве $(F^1/\sim_{\rm isot})^{\rm discr}\times(-1;1)^{\mathcal{C}_{f,1}}\times H^1_{f_*}$ подпространства

$$\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}:=\bigcup_{[f]_{\rm isot}\in F^1/\sim_{\rm isot}}\{[f]_{\rm isot}\}\times D^*_{[f]_{\rm isot}}\times U^\infty_{[f]_{\rm isot}},$$

$$\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,\circ *} := \bigcup_{[f]_{\rm isot}\in F^1/\sim_{\rm isot}} \{[f]_{\rm isot}\}\times(\mathring{D}_{[f]_{\rm isot}})^*\times U^\infty_{[f]_{\rm isot}},$$

где $U^\infty_{[f]_{\rm isot}}$ определено как в (3.13). Имеем включения $\widetilde{\mathbb{X}}\subset\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$ и $\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,\circ *}\subset\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$.

Аналогично определению 4.1 определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$ с помощью покомпонентного действия на $D^*_{[f]_{\rm isot}}\times U^\infty_{[f]_{\rm isot}}$ дискретной группы $\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\rm isot}}$ (см. §3, шаг 9). Определим "окрестность" стандартной ручки $\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}$:

$$(\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})^{\rm st} := (D^*_{[f]_{\rm isot}}\times U^\infty_{[f]_{\rm isot}})/\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\rm isot}} \approx (D^*_{[f]_{\rm isot}}\times \mathbb{S}^\infty_{[f]_{\rm isot}})/\Gamma_{[f]_{\rm isot}},$$

$$\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}} := \{[f]_{\rm isot}\}\times(\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})^{\rm st}\subset\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*} := \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}/\sim .$$

Определим отношение эквивалентности $\sim_{\rm glue}$ на $\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*} := \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}/\sim$ с помощью вложений $\chi^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}\colon\ \partial_{[g]_{\rm isot}}(\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})^{\rm st}\hookrightarrow(\mathbb{D}^{\infty,*}_{[g]_{\rm isot}})^{\rm st}$, определяемых теми же формулами, что и вложения $\chi_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}\colon\ \partial_{[g]_{\rm isot}}\mathbb{D}^{\rm st}_{[f]_{\rm isot}}\hookrightarrow\mathbb{D}^{\rm st}_{[g]_{\rm isot}}$ (см. §3, шаг 10). Рассмотрим пространства

$$\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,\circ *} := \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,\circ *}/\sim,\qquad \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*} := \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}/\sim,\qquad \widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}/\sim_{\rm glue}$$

с фактортопологией, тогда $\widetilde{\mathbb{K}}\subset\widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть

$$p_X\colon\ \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}\to\widetilde{\mathcal{M}},\qquad p_Y\colon\ \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}\to\widetilde{\mathcal{M}}$$

– канонические проекции. Рассмотрим "окрестность" $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}} := p_Y(\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})$ косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\rm isot}}\subset\widetilde{\mathbb{K}}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Так как $\widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$ является гладким открытым $3q$-мерным многообразием с естественной плоской аффинной связностью, и каждая группа $\widetilde{\Gamma}_{[f]_{\rm isot}}$ действует на нем диффеоморфизмами, сохраняющими связность, то $\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}$ тоже является гладким открытым $3q$-мерным многообразием с плоской аффинной связностью.

Теорема 4.3. *Пространство $\widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}/\sim_{\rm glue}$ обладает структурой гладкого $3q$-мерного многообразия и естественной плоской аффинной связностью, гладкой относительно этой структуры. При этом для каждого класса изотопности $[f]_{\rm isot}$ выполнены следующие условия:*
(i) подмножество $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}} = p_Y(\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})\subset\widetilde{\mathcal{M}}$ открыто, где $p_Y\colon\ \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}\to\widetilde{\mathcal{M}}$ – проекция,
(ii) отображение $p_Y|_{\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}}\colon\ \boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}\to\widetilde{\mathcal{M}}$ является гладким регулярным вложением гладких $3q$-мерных многообразий, сохраняющим аффинную связность.
Отображение $p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,\circ *}}\colon\ \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,\circ *}\to\widetilde{\mathcal{M}}$ биективно. Дискретная группа $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ и группа $\mathrm{Diff}^+[-1;1]$ *действуют на $\widetilde{\mathcal{M}}$ справа и слева соответственно диффеоморфизмами, сохраняющими аффинную связность и области $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.2 доказательство проводится индукцией, а именно, доказывается однозначность, непрерывность и инъективность соответствующих приклеивающих отображений, а также биективность отображения $p_Y|_{\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,\circ *}}\colon\ \widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,\circ *}\to\widetilde{\mathcal{M}}$. Так как каждое приклеивающее отображение $(\varphi^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}})'$ определено на открытом подмножестве открытого подмножества $\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}\subset\widetilde{\mathbb{Y}}^{\infty,*}$ и является непрерывным и инъективным отображением $3q$-мерных многообразий, то $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}$ открыто в $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $p_Y|_{\boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}}\colon\ \boldsymbol{v}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}\to\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot}}\subset\widetilde{\mathcal{M}}$ является гомеоморфизмом (в индуцированной топологии). В частности, каждая точка пространства $\widetilde{\mathcal{M}}$ обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{3q}$. Так как пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово (см. ниже), а все отображения $\chi^{\infty,*}_{[f]_{\rm isot},[g]_{\rm isot}}$ (а потому и

все приклеивающие отображения) являются гладкими и сохраняют плоскую аффинную связность, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ является гладким $3q$-мерным многообразием с естественной плоской аффинной связностью.

Осталось доказать, что пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово. Рассмотрим естественное непрерывное "вычисляющее" отображение

$$\mathrm{Ev}^*\colon \widetilde{\mathbb{X}}^{\infty,*} \to \mathbb{R}^q/\Sigma_q, \qquad ([f]_{\mathrm{isot}}, \boldsymbol{c}, u) \mapsto \Sigma_q \boldsymbol{c},$$

где группа перестановок Σ_q действует на любом наборе $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q$ перестановками компонент. Легко проверяется, что оно индуцирует (автоматически непрерывное) отображение $\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}^q/\Sigma_q$, которое тоже будем обозначать через Ev^*. Пусть $m_1, m_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $\mathrm{Ev}^*(m_1) \neq \mathrm{Ev}^*(m_2)$, то точки m_1, m_2 обладают непересекающимися окрестностями ввиду хаусдорфовости $\mathbb{R}^q/\Sigma_q$ и непрерывности Ev^*. Пусть $\mathrm{Ev}^*(m_1) = \mathrm{Ev}^*(m_2)$ и $m_i \in \mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_i]_{\mathrm{isot}}}$, $i = 1, 2$. Если $[f_1]_{\mathrm{isot}} \neq [f_2]_{\mathrm{isot}}$, то в силу леммы 3.1 не существует класса изотопности $[g]_{\mathrm{isot}}$, такого что $[g]_{\mathrm{isot}} \succ [f_i]_{\mathrm{isot}}$, $i = 1, 2$, а потому образы приклеивающих отображений $(\varphi^{\infty,*}_{[f_i]_{\mathrm{isot}}})'$, $i = 1, 2$, имеют пустое пересечение, откуда окрестности $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_i]_{\mathrm{isot}}}$ точек m_i, $i = 1, 2$, в $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеют пустое пересечение. Если $[f_1]_{\mathrm{isot}} = [f_2]_{\mathrm{isot}}$ и $m_1 \neq m_2$, то точки $m_1, m_2 \in \mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}}$ обладают непересекающимися окрестностями ввиду открытости $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}}$, хаусдорфовости стандартного пространства $(\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}})^{\mathrm{st}}$ и гомеоморфности $\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}} \approx \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}} \approx (\mathbb{D}^{\infty,*}_{[f_1]_{\mathrm{isot}}})^{\mathrm{st}}$ (см. выше). Таким образом, пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ является хаусдорфовым. Теорема 4.3 доказана. $\square$

Теоремы 4.2 и 4.3 доказывают основную теорему 2.6(A,B). Утверждение п.(C) теоремы 2.6 нетрудно выводится из (3.25) и явного описания (3.24) набора образующих свободной абелевой группы $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. §3, шаг 7).

Список литературы

[1] Е.А. Кудрявцева, Д.А. Пермяков. Оснащенные функции Морса на поверхностях. Матем. Сб. 201, No. 4 (2010), 501-567.

[2] М. Громов. Дифференциальные Соотношения с Частными Производными. М.: Мир, 1990.

[3] K. Igusa. Higher singularities of smooth functions are unnecessary. Ann. Math. 119 (1984), 1-58.

[4] В.А. Васильев. Топология пространств функций без сложных особенностей. Функ. Ан. Прил. 23(4) (1989), 24-36.

[5] J. Franks. Homology and Dynamical Systems. CBMS Regional Conf. 49 (1982), Amer. Math. Soc.

[6] A. Hatcher. Higher simple homotopy theory. Annals of Math. (2) 102 (1975), 101-137.

[7] A. Chenciner, F. Laudenbach. Morse 2-jet space and h-principle. arXiv:0902.3692v1 [math.GT] 23 Feb 2009

[8] Е.А. Кудрявцева. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, в печати (2011). arXiv:1007.4398.

[9] B. Farb, N.V. Ivanov. The Torelli geometry and its applications. Research announcement. arXiv:math.GT/0311123 v1.

[10] W.J. Harvey. Geometric structure of surface mapping class groups. In Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), 255-269. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979.

[11] J. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. Invent. Math. 84(1) (1986), 157-176.

[12] N. Ivanov. Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces. In: Progress in knot theory and related topics, 113-120. Paris: Hermann, 1997.

[13] A. Hatcher, W. Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface. Topology 19(3) (1980), 221-237.

[14] D. Margalit. The automorphism group of the complex of pants decompositions. arXiv:math/0201319v1 [math.GT].

[15] S.V. Matveev, M. Polyak. Cubic complexes and finite types invariants. Geom. Topol. Monogr. 4 (2002), 215-233. arXiv: math.GT/0204085, 2002.

[16] Е.А. Кудрявцева. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты. Матем. Сборник 190 (1999), No. 3, 29-88.

[17] В.В. Шарко. Функции на поверхностях, I. В книге: Труды Матем. Инст. Укр. НАН "Некоторые проблемы современной математики", ред. В.В.Шарко, 25, Киев, Наукова Думка, 1998. С. 408-434.

[18] S.I. Maksymenko. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces. Comment. Math. Helv. 80 (2005), 655-690.

[19] Ю.М. Бурман. Теория Морса для функций двух переменных без критических точек. Функц. Дифф. Ур. 3(1-2) (1995), 31-31.

[20] Yu.M. Burman. Triangulations of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points. Annals of Global Analysis and Geometry 17(3) (1999), 221-238.

[21] E.V. Kulinich. On topologically equivalent Morse functions on surfaces. Methods of Funct. Anal. Topology 4 (1) (1998), 59-64.

[22] S.I. Maksymenko. Stabilizers and orbits of Morse functions. arXiv:math.GT/0310067 v5 14 Aug 2006.

[23] А.Т. Фоменко. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. ДАН СССР 287, No. 5 (1986), 1071-1075.

[24] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР 54, No. 3 (1990), 546-575.

[25] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I: Матем. Сб. 185, No. 4 (1994), 27-89; II: Матем. Сб. 185, No. 5 (1994), 27-28.

[26] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Введение в топологию интегрируемых гамильтонорвых систем. М.: Наука, 1997.

[27] Е.А. Кудрявцева. Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях. В книге: Топологические методы в теории гамильтоновых систем. Ред. А.Т. Фоменко и А.В. Болсинов. М.: Факториал, 1998. С. 147-202.

[28] Кудрявцева Е.А., Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях. Докл. Акад. Наук 361, N.3 (1998), 314-317.

[29] Brailov, Yu. A. and Kudryavtseva, E. A., Stable topological nonconjugacy of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **No. 2** (1999), 20-27, 72 (in Russian).

[30] В.И. Арнольд. Пространства функций с умеренными особенностями. Функц. Анал. Прил. 23(3) (1989), 1-10.

[31] Е.А. Кудрявцева. Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, No. 4 (2009), 13-22.

[32] C.J. Earle, J. Eells, Jr. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. Bull. Amer. Math. Soc. 73, no. 4 (1967), 557-559.

[33] C.J. Earle, J. Eells, Jr. A fibre bundle description of Teichmüller theory. J. Diff. Geometry 3 (1969), 19-43.

[34] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 621-626.

[35] *Bridson M.R., Haefliger A.*, Metric spaces of non-positive curvature // Berlin, Heidelberg, N.Y., Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo: Springer, 1999.

[36] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[37] A. Postnikov. Permutohedra, associahedra, and beyond. arXiv:math/0507163v1 [math.CO] 7 Jul 2005.

[38] M. Dehn. Die Gruppe der Abbildungsklassen (Das arithmetische Feld auf Flächen). Acta mathematica 69 (1938), 135-206.

[39] J.S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy. Abelian and solvable subgroups of the mapping class group. Duke Math. J. 50, No.4 (1983), 1107-1120.

[40] Д.А. Пермяков. Линейная независимость скручиваний Дэна. Дипломная работа. http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2009-dip-permyakov.pdf

[41] А. Кронрод. О функциях двух переменных. Успехи Матем. Наук 5 (1950), No. 1, 24-134.